Compito di prova 1
??/01/2013

Esercizio 1
Dare la definizione di continuità in x_0 per una funzione f da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

f è continua in x_0 se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esercizio 2
Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} |x+1| \geq 4 \\ x-1 > 0 \end{cases} \qquad \boxed{[3, +\infty)}$$

Esercizio 3
Sul piano cartesiano siano $A = (1,3)$, e $B = (2,4)$. Sia $r : y = mx + q$ la retta passante per A e B.

(a) Calcolare la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ $\boxed{\overline{AB} = \sqrt{2}}$

(b) Calcolare il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ $\boxed{M = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)}$

(c) Calcolare l'equazione della retta $r : y = mx + q$ $\boxed{y = x + 2}$

(d) Calcolare l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per A, B e per l'origine O. $\boxed{y = 4x - x^2}$

Esercizio 4
Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \boxed{\frac{1}{6}}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \boxed{0}$

(d) $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^3 = \boxed{-\infty}$

(e) $\lim_{x \to 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1-\cos(x)}{x^3}} = \boxed{e^{\frac{1}{2}}}$

Esercizio 5
Calcolare la derivata della seguente funzione:

(a) $f(x) = \log(1 + \cos^2(x))$ $\qquad \frac{d}{dx} f(x) = \boxed{-\frac{2\cos x \sin x}{1 + \cos^2 x}}$

Esercizio 6

Studiare la seguente funzione.

(a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Calcolo derivata seconda. (f) Calcolo della retta tangente in $x_0 = 0$ (g) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (h) Concavitá e convessità. (i) Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. (l) Tracciarne il grafico.

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

(a) $D = \mathbb{R}$

(b) NON PERIODICA

(c) $f(-x) = -x e^{-(-x)^2} = -f(x)$

f è Dispari

(d) $f'(x) = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$

(e) $f''(x) = 2x(2x^2 - 3) e^{-x^2}$

(f) $r: \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$r: \; y = x$

(g)
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ f'(x) = 0 & \text{se } x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ f'(x) < 0 & \text{se } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{+x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{+2x e^{x^2}} = 0$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ Siz $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2e}} < 0$ $f(x_2) = +\frac{1}{\sqrt{2e}} > 0$

x_1 è punto di minimo assoluto

x_2 è punto di massimo assoluto

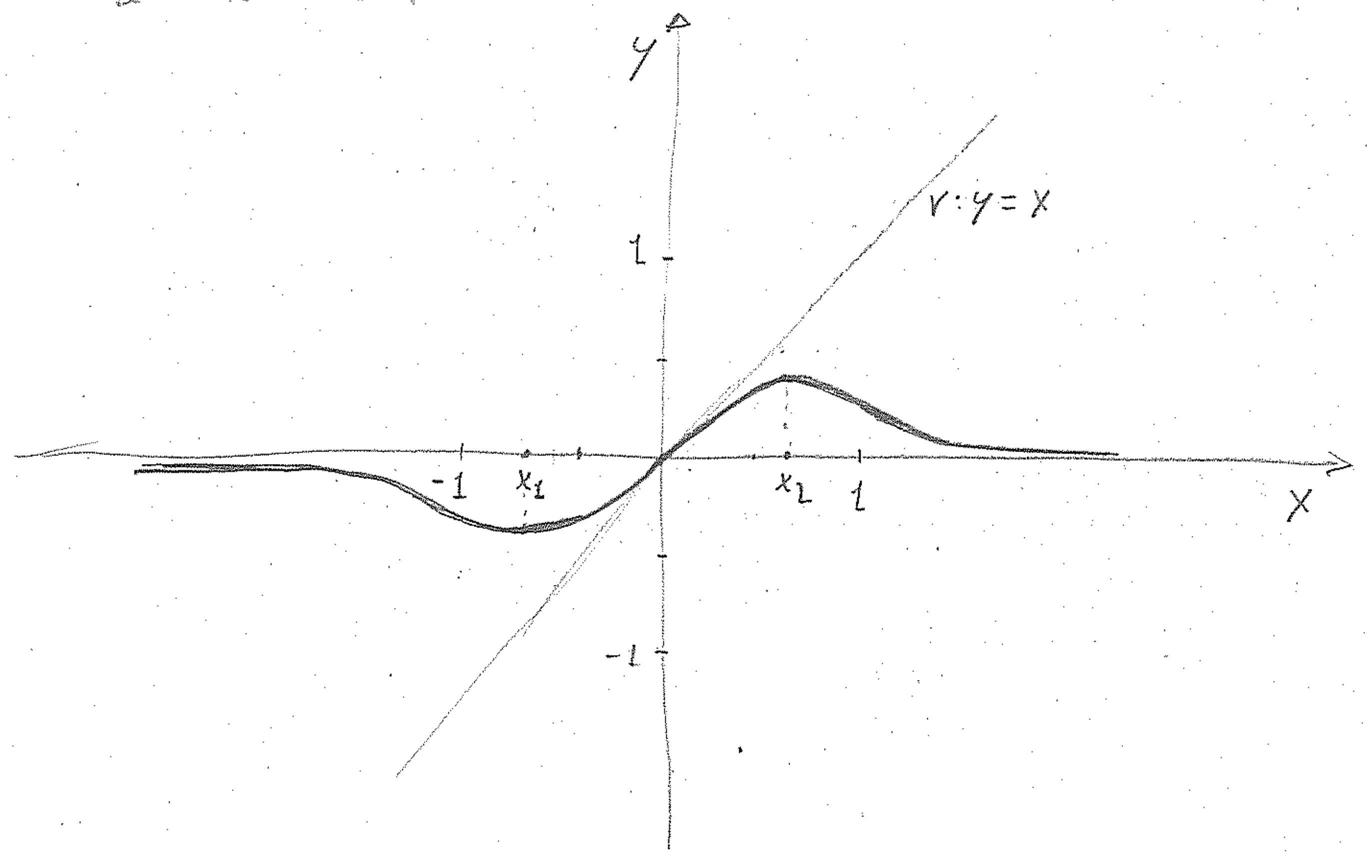
(h) $\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{se } x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right) \\ f''(x) = 0 & \text{se } x \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right\} \\ f''(x) < 0 & \text{se } x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \end{cases}$

f è CONVESSA IN $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ e IN $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

f è CONCAVA IN $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e IN $\left(0, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

(i) Asintoto orizzontale a $y = 0$
a $-\infty$ e $+\infty$

(l)



Esercizio 7

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < -1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ \cos(x) & 0 \le x < \pi \\ \sin(x) - 1 & x \ge \pi \end{cases}$$

$\boxed{0}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Esercizio 8

Trovare l'equazione della retta tangente ad f in x_0.($r: \ y = mx + q$)

$(a) \quad f(x) = 1 - 2x^2 \qquad x_0 = 1 \qquad \boxed{m = -4, q = +3}$

Esercizio 9

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \boxed{4}$$

Esercizio 10

Risolvere i seguenti integrali.

$(a) \quad \int e^x + x^3 \, dx = \boxed{e^x + \frac{x^4}{4} + c} \qquad (b) \quad \int_0^2 (t^2 + 3t) \, dt = \boxed{\frac{26}{3}}$

$(c) \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \boxed{2 e^{\sqrt{x}} + c} \qquad (d) \quad \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} \, dx = \boxed{2}$

Esercizio 11

Data le matrici A e B calcolare $A + B$ e $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad A + B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}} \qquad (b) \quad A \cdot B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 12

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$(a) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \boxed{y(t) = e^t - 1} \qquad (b) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -4y(t) \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \boxed{y(t) = \cos(2t)}$