

Compito di prova 2

??/01/2013

Esercizio 1

Dare la definizione di autovettore e autovalore.

Data una Matrice $A \in M_{n,n}$, un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$
 si dice autovettore di A di autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$
 se $A \cdot v = \lambda v$

Esercizio 2

Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} \quad \boxed{\left[1, \frac{3}{2}\right)}$$

Esercizio 3

Sul piano cartesiano siano $A = (4, 0)$, e $B = (2, 3)$, sia θ l'angolo $A\hat{O}B$, sia r la retta passante per A e B e sia infine s la retta ortogonale a r e passante per l'origine O .

- (a) Calcolare il coseno dell'angolo θ $\boxed{\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}}$
- (b) Calcolare il seno dell'angolo θ $\boxed{\sin(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}}}$
- (c) Calcolare l'equazione della retta r $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 6}$
- (d) Calcolare l'equazione della retta s $\boxed{y = \frac{2}{3}x}$

Esercizio 4

Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \sqrt{2}}{\cos(x) - \sqrt{2}} = \boxed{-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{x} = \boxed{+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{|x|}}{x} = \boxed{-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \cos(x)} = \boxed{1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2(x))^{\frac{1}{\cos(x)-1}} = \boxed{e^2}$

Esercizio 5

Calcolare la derivata della seguente funzione:

(a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\log(x)}$ $\frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\left(2 - \frac{1}{x e^{2x}}\right) \frac{e^{2x}}{\log x}}$

Esercizio 6

Studiare la seguente funzione.

- (a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Calcolo derivata seconda. (f) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (g) Concavità e convessità. (h) Esiste una retta tangente ad f e parallela all'asse delle ascisse? Se sì, indicarne l'equazione. (i) Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. (l) Tracciarne il grafico.

$$f(x) = e^x + e^{-2x} - 3$$

(a) $D = \mathbb{R}$

(b) $\neq$ Non periodica

(c) Né pari né dispari

(d) $f'(x) = e^x - 2e^{-2x} = e^x(1 - 2e^{-3x})$

(e) $f''(x) = e^x + 2e^{-2x}$

(f) $f'(x) > 0$ se $x \in \left(\frac{\log 2}{3}, +\infty\right)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x = \frac{\log 2}{3}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right)$$

$x_0 = \frac{\log 2}{3} \approx 0.231$ punto di minimo assoluto

$$y_0 = f(x_0) = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} - 3 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} - 3 \approx -1.11$$

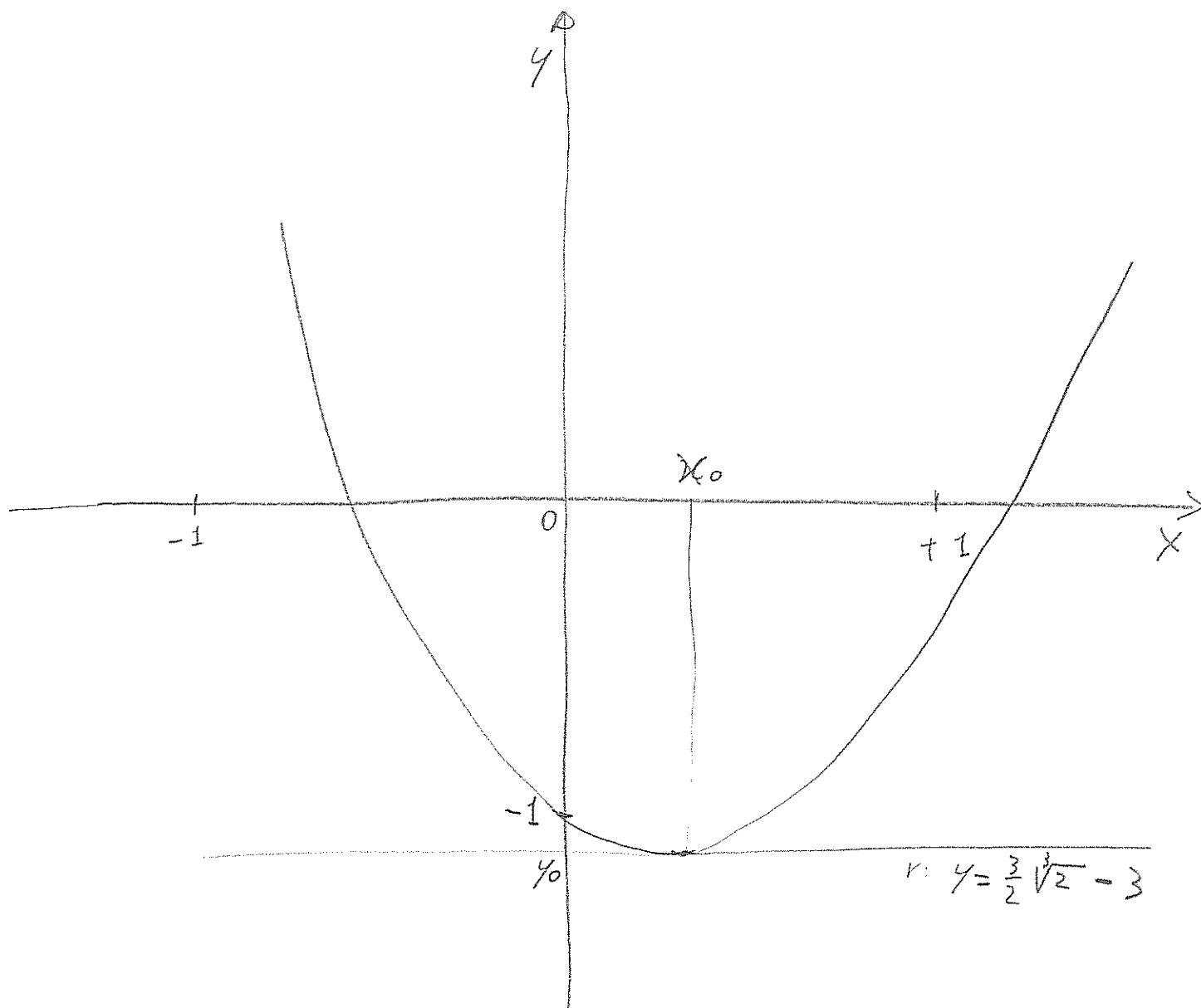
(g) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f è convessa² su tutto $\mathbb{R}$

$$(h) \quad y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} - 3$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

f Now has asymptote.



Esercizio 7

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x < 2 \\ 2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

0

2

Esercizio 8

Trovare l'equazione della retta tangente ad f in x_0 . ($r: y = mx + q$)

$$(a) \quad f(x) = \tan(x) \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \quad m = 2, q = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 9

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{100} n = 5050$$

Esercizio 10

Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \quad \int (\sin(x) - \cos(x)) \, dx = -\sin(x) - \sin(x) + C \quad (b) \quad \int_0^{\log(2)} (e^t) \, dt = 1$$

$$(c) \quad \int x^7 \sin(x^8) \, dx = -\frac{\cos(x^8)}{8} + C \quad (d) \quad \int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \pi$$

Esercizio 11

Data le matrici A ed il vettore v , determinare il determinante di A e il prodotto Av .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad \det(A) = 4 \quad (b) \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{e^t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = \sqrt{2e^t - 1} \quad (b) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = 4y(t) \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$