Prova d'esame di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
17/06/2014

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti) supponiamo che $X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$ e $Y \sim exp(1)$. Sia $W := X + Y$. E' possibile che W abbia distribuzione Poissoniana? (`Sugg. Se è possibile fornire un esempio. Se non è possibile fornire una dimostrazione`)

Esercizio 2. (V. 8 punti.)
Consideriamo due urne A e B. L'urna A contiene 3 biglie rosse e 2 nere, mentre l'urna B contiene 2 biglie bianche, 2 rosse e 2 nere. Scegliamo un'urna a caso ed estraiamo due biglie (senza reinserimento). Per $i \in \{1, 2\}$ siano B_i, R_i e N_i gli eventi l'i-esima biglia estratta è bianca, rossa, nera. Indichiamo infine con A risp. B gli eventi le biglie sono state estratte dall'urna A risp. B. (`Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni`)
(a) Calcolare $P(R_2|A)$.
(b) Calcolare $P(N_1R_2|A)$.
(c) Calcolare $P(R_1)$.
(d) Calcolare $P(R_1 \cap A)$.
(e) Calcolare $P(A|R_1)$.
(f) Calcolare $P(R_1N_2)$.
(g) Calcolare $P(B|R_1N_2)$.
(h) Sia X il numero di biglie rosse estratte, quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Esercizio 3. (V. 10 punti.)
Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione uniforme sull'intervallo $(1,7)$,
$X_n \sim Unif(1,7)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano definite le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad\qquad T_n := \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$$

Calcolare media e varianza di Y_n. Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti? Sono non correlate? Dimostrare che la successione $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa una legge dei grandi numeri (debole o forte a scelta).

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ un modello statistico con $\Theta = (0, \infty)$. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un campione tale che per ogni $\theta > 0$, le v.a. X_n abbiano distribuzione assolutamente continua con densità f_θ data da:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \alpha_\theta x & x \in (0, \theta) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia infine $T_n := \beta\frac{X_1+...+X_n}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(a) Calcolare α_θ.
(b) Dimostrare che per $\beta = \frac{3}{2}$ si ha: T_n stimatore corretto per θ.
(c) Sia $\beta = \frac{3}{2}$ dimostrare che per ogni $\theta > 0$ vale:
$P_\theta(\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} T_n(\omega) = \theta) = 1$

Esercizio 5. (V. 6 punti.)
Una compagnia di assicurazioni auto prevede per i guidatori giovani una polizza più alta, in quanto questo gruppo tende ad avere un numero maggiore di incidenti. La compagnia ha 80000 assicurati divisi in 3 gruppi:
A (sotto i 25 anni, 20% di tutti i suoi assicurati),
B (25-35 anni, 30%),
C (sopra i 35 anni 50%).
I dati mostrano che in media ogni anno le percentuali di assicurati che hanno un incidente sono: 10% per il gruppo A, 5% per il B, 2% per il C. Sia X il numero di assicurati che avranno un incidente il prossimo anno.
(a) Calcolare media e varianza di X.
(b) Scelgo un assicurato a caso (tra gli 80000), se so che ha avuto un incidente qual è la probabilità che sia del gruppo A?
(c) Stimare la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente sia maggiore (strettamente) di 3700.