Prova d'esame di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
03/09/2014

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Mostrare con un esempio che esistono due variabili aleatorie X e Y discrete, indipendenti e identicamente distribuite tali che posto $Z := X + Y$ si abbia:

$$P(Z < 0) = P(Z = 0) = P(Z > 0) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2. (V. 8 punti.)
Suppponiamo di avere un dado regolare a sei facce e un mazzo di 20 carte numerate con i numeri da 1 a 20 e disposte in ordine casuale. Eseguiamo nell'ordine le seguenti operazioni:
1) Lanciamo il dado ed indichiamo con X il risultato del lancio
2) Riveliamo le prime X carte del mazzo.
3) Indichiamo con Y la variabile aleatoria che indica il minimo valore ottenuto tra le carte rivelate.

a) Calcolare $P(Y = 1|X = 1)$.
b) Calcolare $P(Y = 1, X = 1)$.
c) Calcolare $P(Y = 1|X = 3)$.
d) Calcolare $P(Y = 2|X = 3)$.
e) Calcolare $P(Y = n|X = 3)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
f) Calcolare $P(Y = n, X = j)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
g) Calcolare $P(Y = 19)$.
h) Calcolare $P(Y = 1)$.

Esercizio 3. (V. 12 punti.)
Sia $\{(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}^+}$ un modello statistico, sia $(X_n)_{n\geq 1}$ un campione tale che per ogni $\theta \in \mathbb{R}^+$ si abbia X_n v.a. assolutamente continua con densità f_θ data da:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x \notin (\theta, 2\theta) \\ C_\theta x & \text{se } \; x \in (\theta, 2\theta) \end{cases}$$

a) Calcolare C_θ.
b) Calcolare $\mathbb{E}[X_n]$ e $Var(X_n)$.
c) Sia $Y := \beta \frac{X_1+\ldots+X_N}{N}$. Per quali valori di β la v.a. Y è uno stimatore corretto di θ.
d) Fissato $\theta > 0$ calcolare F_{X_n} funzione di ripartizione di X_n.
e) Fissato $\theta > 0$. Sia U una v.a. con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$. Trovare una funzione $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ crescente tale che posto $T := g(U)$ si abbia $T \sim X_n$.
f) Sia $N = 100$, sia $S_N := X_1+\ldots+X_N$. Stimare la probabilità $P(S_N > \frac{3}{2}\theta N)$

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Siano X, Y, Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzione: $X \sim N(0,1)$, $Y \sim Bin(3, \frac{1}{2})$, $Z \sim geom(\frac{1}{2})$. Siano $T := min(X, Y, Z)$ e $W := max(1, X)$.

a) Calcolare $P(T < 0)$.
b) Calcolare $P(T = 3)$.
c) Calcolare F_T funzione di ripartizione della v.a. T.
d) Quanto vale il valore atteso $\mathbb{E}[W]$?