Prova d'esame di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
03/09/2014

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Mostrare con un esempio che esistono due variabili aleatorie X e Y discrete, indipendenti e identicamente distribuite tali che posto $Z := X + Y$ si abbia:

$$P(Z < 0) = P(Z = 0) = P(Z > 0) = \frac{1}{3}$$

Soluzione
$X \sim Y \sim Unif\{-1, 0, 1\}$

Esercizio 2. (V. 8 punti.)
Suppponiamo di avere un dado regolare a sei facce e un mazzo di 20 carte numerate con i numeri da 1 a 20 e disposte in ordine casuale. Eseguiamo nell'ordine le seguenti operazioni:
1) Lanciamo il dado ed indichiamo con X il risultato del lancio
2) Riveliamo le prime X carte del mazzo.
3) Indichiamo con Y la variabile aleatoria che indica il minimo valore ottenuto tra le carte rivelate.

a) Calcolare $P(Y = 1|X = 1)$.
b) Calcolare $P(Y = 1, X = 1)$.
c) Calcolare $P(Y = 1|X = 3)$.
d) Calcolare $P(Y = 2|X = 3)$.
e) Calcolare $P(Y = n|X = 3)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
f) Calcolare $P(Y = n, X = j)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
g) Calcolare $P(Y = 19)$.
h) Calcolare $P(Y = 1)$.

Soluzione
(a) $\frac{1}{20}$
(b) $\frac{1}{120}$
(c) $\frac{3}{20}$
(d) $\frac{51}{380}$
(e) $\frac{(20-n)(19-n)}{2280}$
(f) $\frac{\binom{20-n}{j-1}}{\binom{20}{3}} \cdot \frac{1}{6}$
(g) $\frac{7}{760}$
(h) $\frac{7}{40}$

Esercizio 3. (V. 12 punti.)
Sia $\{(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}^+}$ un modello statistico, sia $(X_n)_{n\geq 1}$ un campione tale che per ogni $\theta \in \mathbb{R}^+$ si abbia X_n v.a. assolutamente continua con densità f_θ data da:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \notin (\theta, 2\theta) \\ C_\theta x & \text{se } \ x \in (\theta, 2\theta) \end{cases}$$

a) Calcolare C_θ.
b) Calcolare $\mathbb{E}[X_n]$ e $Var(X_n)$.
c) Sia $Y := \beta\frac{X_1+...+X_N}{N}$. Per quali valori di β la v.a. Y è uno stimatore corretto di θ.
d) Fissato $\theta > 0$ calcolare F_{X_n} funzione di ripartizione di X_n.
e) Fissato $\theta > 0$. Sia U una v.a. con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Trovare una funzione $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ crescente tale che posto $T := g(U)$ si abbia $T \sim X_n$.
f) Sia $N = 100$, sia $S_N := X_1+\ldots+X_N$. Stimare la probabilità $P(S_N > \frac{3}{2}\theta N)$

Soluzione
(a) $C_\theta = \frac{2}{3\theta^2}$,

(b) $\frac{14}{9}\theta$, $\frac{13}{162}\theta^2$,

(c) $\beta = \frac{9}{14}$,

(d) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < \theta \\ \frac{1}{3}(\frac{t^2}{\theta^2} - 1) & \theta \leq t < 2\theta \\ 1 & t < 2\theta \leq t \end{cases}$

(e) $g(y) = \theta\sqrt{3y + 1}$ per ogni y in $(0, 1)$

(f) 97.5%

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Siano X, Y, Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzione: $X \sim N(0,1)$, $Y \sim Bin(3, \frac{1}{2})$, $Z \sim geom(\frac{1}{2})$. Siano $T := min(X,Y,Z)$ e $W := max(1,X)$.

a) Calcolare $P(T < 0)$.
b) Calcolare $P(T = 3)$.
c) Calcolare F_T funzione di ripartizione della v.a. T.
d) Quanto vale il valore atteso $\mathbb{E}[W]$?

Soluzione
(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{32} \cdot (1 - \Phi(3)) \simeq 0.0000421875$

(c) $F_T(t) = \begin{cases} \Phi(t) & t < 0 \\ \frac{7\Phi(t)+1}{8} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3+\Phi(t)}{4} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{31+\Phi(t)}{32} & 2 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t \end{cases}$

(d) $\Phi(1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$