

Prova d'esame di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
18/09/2014

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 6 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $X \sim Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Trovare due funzioni $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tali che posto

$$Z_t := f(t)X + g(t)Y \quad \forall t \in [0, 1]$$

si abbia $Z_0 = X$, $Z_1 = Y$, e $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ per ogni t in $[0, 1]$.

Suggerimento: si utilizzi la proprietà che la combinazione lineare di v.a. normali indipendenti è ancora una v.a. con distribuzione normale.

Esercizio 2. (V. 6 punti.)

Due giocatori A e B giocano a dadi. Ciascuno dei due giocatori lancia un dado regolare a sei facce, sia X il risultato del lancio di A e sia Y il risultato del lancio di B. Stabiliscono le seguenti regole del gioco:

se $Y > X$ vince B mentre se $X \geq Y$ vince A,

se vince A allora A riceve un euro da B,

se vince B allora B riceve α euro da A.

Per quali valori di α il gioco può considerarsi equo?

Esercizio 3. (V. 12 punti.)

Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(-1, 1)$. Siano Y e Z le variabili aleatorie definite da:

$$Y := X^2 \qquad Z := \frac{X + 1}{2}$$

- a) Calcolare la densità e la funzione di ripartizione della v.a. Y .
- b) Calcolare la densità e la funzione di ripartizione della v.a. Z .
- c) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
- d) Quanto valgono media e la varianza della v.a. Z .
- e) Le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti? **Giustificare la risposta.**
- f) Quanto vale $P(Y > Z)$?

Esercizio 4. (V. 8 punti.)

Siano $X_{n\{n\in\mathbb{N}\}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(0, 1)$. Siano $Y_{n\{n\in\mathbb{N}\}}$ e $Z_{n\{n\in\mathbb{N}\}}$ le successione di variabili aleatorie definite da:

$$Y_n := (X_n)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$Z_n := \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Calcolare la densità e la funzione di ripartizione della v.a. Y_n .
- b) Calcolare $\mathbb{E}[Y_n]$.
- c) Cosa si può dire del seguente limite?

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(X_1)^n + \dots + (X_N)^n}{N}$$

- d) Dimostrare che con probabilità 1 si ha:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} Z_N = 0$$