

Secondo compito di  
**Probabilità e Statistica**  
Laurea Triennale in Matematica  
17/06/2014

**COGNOME e NOME** .....

**N. MATRICOLA**.....

**Esercizio 1.** (V. 2 punti.)

Fornire la definizione di stimatore corretto.

**Esercizio 2.** (V. 4 punti.)

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti) supponiamo che  $X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$  e  $Y \sim exp(1)$ . Sia  $W := X + Y$ . E' possibile che  $W$  abbia distribuzione Poissoniana? (Sugg. Se è possibile fornire un esempio. Se non è possibile fornire una dimostrazione)



**Esercizio 3.** (V. 10 punti.)

Sia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione uniforme sull'intervallo  $(1, 7)$ ,  $X_n \sim Unif(1, 7)$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  siano definite le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \qquad T_n := \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$$

Calcolare media e varianza di  $Y_n$ . Le variabili aleatorie  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sono indipendenti? Sono non correlate? Dimostrare che la successione  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soddisfa una legge dei grandi numeri (debole o forte a scelta).



**Esercizio 4.** (V. 6 punti.)

Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  un modello statistico con  $\Theta = (0, \infty)$ . Sia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un campione tale che per ogni  $\theta > 0$ , le v.a.  $X_n$  abbiano distribuzione assolutamente continua con densità  $f_\theta$  data da:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \alpha_\theta x & x \in (0, \theta) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia infine  $T_n := \beta \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Calcolare  $\alpha_\theta$ .

(b) Dimostrare che per  $\beta = \frac{3}{2}$  si ha:  $T_n$  stimatore corretto per  $\theta$ .

(c) Sia  $\beta = \frac{3}{2}$  dimostrare che per ogni  $\theta > 0$  vale:

$$P_\theta(\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\omega) = \theta) = 1$$



**Esercizio 5.** (V. 8 punti.)

Una compagnia di assicurazioni auto prevede per i guidatori giovani una polizza più alta, in quanto questo gruppo tende ad avere un numero maggiore di incidenti. La compagnia ha 80000 assicurati divisi in 3 gruppi:

A (sotto i 25 anni, 20% di tutti i suoi assicurati),

B (25-35 anni, 30%),

C (sopra i 35 anni 50%).

I dati mostrano che in media ogni anno le percentuali di assicurati che hanno un incidente sono: 10% per il gruppo A, 5% per il B, 2% per il C. Sia  $X$  il numero di assicurati che avranno un incidente il prossimo anno.

(a) Calcolare media e varianza di  $X$ .

(b) Scelgo un assicurato a caso (tra gli 80000), qual è la probabilità che abbia un incidente.

(c) Scelgo un assicurato a caso (tra gli 80000), se so che ha avuto un incidente qual è la probabilità che sia del gruppo A?

(d) Stimare (utilizzando l'approssimazione normale) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente sia maggiore (strettamente) di 3700.