Secondo compitino di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
17/06/2014

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 3 punti.)
Date due variabili X e Y in L^2. Dimostrare che se X e Y sono indipendenti allora sono non correlate.

Esercizio 2. (V. 3 punti.)
Esporre la proprietà 'assenza di memoria' per variabili aleatorie esponenziali.

Esercizio 3. (V. 10 punti.)
Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Supponiamo che le v.a. X_n abbiano distribuzione uniforme sull'intervallo $(1,3)$, $X_n \sim Unif(1,3)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano definite le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^{n-i}} \qquad\qquad W_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}$$

Calcolare media e varianza di Y_n. Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti? Sono non correlate? Dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} W_n(\omega) = 4\}) = 1$$

(`Può essere utile l'uguaglianza` $\sum_{j=n}^{m} \alpha^j = \frac{\alpha^n - \alpha^{m+1}}{1-\alpha}$).

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Un'azienda produce barrette di cioccolato. Consideriamo un insieme costitutito da $n = 25$ barrette. Indichiamo con $(X_n)_{n\in\{1,\dots,25\}}$ il loro peso (in grammi) e supponiamo che si distribuisca come una distribuzione normale di media μ e varianza σ^2, con μ e σ non noti. (Assumiamo che le v.a. siano indipendenti). Indichiamo con $\overline{X} := \sum_{i=1}^{25} \frac{X_i}{n}$ la media campionaria, con $S^2 := \sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ la varianza campionaria, e sia infine $T := \sum_{i=1}^{25} X_i^2$. Supponiamo che si realizzi $X_i(\omega) = x_i$, per $i \in \{1, \dots, 25\}$ con $\sum_{i=1}^{25} x_i = 2475$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 245625$.

(a) Determinare un intervallo di confidenza centrato per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
(b) Determinare un intervallo di confidenza destro per μ con livello di confidenza $\gamma = 99\%$.

Esercizio 5. (V. 6 punti.)
Sia X e Y due variabili aleatorie. Supponiamo che Y abbia distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$, mentre X sia una variabile aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (1, \alpha) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per una qualche costante $\alpha > 1$
(a) Determinare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione di X.
(c) Trovare una funzione $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ crescente tale che posto $T := g(Y)$ si abbia $X \sim T$.