

Probabilità e Statistica

Laurea Triennale in Matematica

17/06/2014

Soluzioni traccia B

Esercizio 2. (Appello completo)

Consideriamo due urne A e B . L'urna A contiene 4 biglie rosse e 2 nere, mentre l'urna B contiene 1 biglia bianca, 2 rosse e 2 nere. Scegliamo un'urna a caso ed estraiamo due biglie (senza reinserimento). Per $i \in \{1, 2\}$ siano B_i , R_i e N_i gli eventi l' i -esima biglia estratta è bianca, rossa, nera. Indichiamo infine con A risp. B gli eventi le biglie sono state estratte dall'urna A risp. B . (Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni)

- (a) Calcolare $P(R_2|A)$.
- (b) Calcolare $P(N_1R_2|A)$.
- (c) Calcolare $P(R_1)$.
- (d) Calcolare $P(R_1 \cap A)$.
- (e) Calcolare $P(A|R_1)$.
- (f) Calcolare $P(R_1N_2)$.
- (g) Calcolare $P(B|R_1N_2)$.
- (h) Sia X il numero di biglie rosse estratte, quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Soluzione

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{15}$ (c) $\frac{8}{15}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{5}{8}$ (f) $\frac{7}{30}$ (g) $\frac{3}{7}$ (h) $\frac{16}{15}$

Esercizio 3.

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Supponiamo che le v.a. X_n abbiano distribuzione uniforme sull'intervallo $(1, 3)$, $X_n \sim Unif(1, 3)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano definite le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^{n-i}} \quad W_n := \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$$

Calcolare media e varianza di Y_n . Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono indipendenti? Sono non correlate? Dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\omega) = 4\}) = 1$$

(Può essere utile l'uguaglianza $\sum_{j=n}^m \alpha^j = \frac{\alpha^n - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha}$).

Soluzione

$$\mathbb{E}[X] = 2 \quad Var(x) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^{n-i}}\right] = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n 2^i \mathbb{E}[X_i] = \boxed{4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

$$Var[Y] = Var\left[\sum_{i=1}^n \frac{2^i}{2^n} X_i\right] = \sum_{i=1}^n Var\left[\frac{2^i}{2^n} X_i\right] = \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^n 4^i Var(X_i)$$

$$Var[Y] = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \sum_{i=1}^n 4^i = \boxed{\frac{4}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}$$

Mostreremo che le variabili aleatorie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non sono scorrelate e quindi non sono nemmeno indipendenti. Per dimostrare che non sono scorrelate basterà mostrare che $Cov(Y_1, Y_2) \neq 0$.

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov\left(X_1, \frac{X_1}{2} + X_2\right) = \frac{1}{2}Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2)$$

sappiamo che $Cov(X_1, X_1) = Var(X_1) = \frac{1}{3}$ mentre poiché X_1 e X_2 sono indipendenti si ha $Cov(X_1, X_2) = 0$ dunque

$$Cov(Y_1, Y_2) = \frac{1}{6} \neq 0$$

Resta da mostrare che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\omega) = 4$.

$$W_n = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{X_j}{2^{i-j}} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq j \leq i \leq n}} \frac{X_j}{2^{i-j}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(2^j X_j \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^i} \right)$$

da cui si ricava

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(2^j X_j \left(2 \frac{1}{2^j} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1-j}} \right) \right) \right) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{2^{n-j}}$$

siamo dunque giunti alla seguente decomposizione di W_n :

$$W_n = 2 \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{2^{n-j}}$$

Le variabili aleatorie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_n] = 2$ dunque per la legge dei grandi numeri vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n} = 4 \quad \text{quasi certamente} \quad (1)$$

Per stimare la seconda sommatoria possiamo utilizzare il fatto che $X_n \sim \text{Unif}(1, 3)$ dunque $|X_n| \leq 3$.

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{2^{n-j}} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{3}{2^{n-j}} = \frac{6}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{2^{n-j}} = 0 \quad (2)$$

dalle equazioni (1) e (2) si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 4 \quad \text{quasi certamente}$$

Esercizio 4.

Un'azienda produce barrette di cioccolato. Consideriamo un insieme costituito da $n = 25$ barrette. Indichiamo con $(X_n)_{n \in \{1, \dots, 25\}}$ il loro peso (in grammi) e supponiamo che si distribuisca come una distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 , con μ e σ non noti. (Assumiamo che le v.a. siano indipendenti). Indichiamo con $\bar{X} := \sum_{i=1}^{25} \frac{X_i}{n}$ la media campionaria, con $S^2 := \sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ la varianza campionaria, e sia infine $T := \sum_{i=1}^{25} X_i^2$. Supponiamo che si realizzi $X_i(\omega) = x_i$, per $i \in \{1, \dots, 25\}$ con $\sum_{i=1}^{25} x_i = 2475$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 245625$.

- (a) Determinare un intervallo di confidenza centrato per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
- (b) Determinare un intervallo di confidenza destro per μ con livello di confidenza $\gamma = 99\%$.

Soluzione Per poter calcolare gli intervalli di confidenza bisogna prima determinare

$$\bar{x} := \sum_{i=1}^{25} \frac{x_i}{25} \qquad s^2 := \sum_{i=1}^{25} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{24}$$

il calcolo di $\bar{x}$ è immediato

$$\bar{x} := \sum_{i=1}^{25} \frac{x_i}{25} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{2475}{25} = 99$$

mentre il calcolo di s^2 richiede più attenzione

$$s^2 = \sum_{i=1}^{25} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{24} = \frac{1}{24} \left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{25} x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^{25} \bar{x}^2 \right)$$

$$s^2 = \frac{1}{24} (245625 - 2 \cdot 2475 \cdot 99 + 25 \cdot 99^2) = 25$$

dunque $s = 5$.

- (a) $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{24, 0.025}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{24, 0.025}) = (96.936, 101.064)$
- (b) $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{24, 0.01}, +\infty) = (96.508, +\infty)$

Esercizio 5. (Secondo compito)

Sia X e Y due variabili aleatorie. Supponiamo che Y abbia distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, mentre X sia una variabile aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (1, \alpha) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per una qualche costante $\alpha > 1$

- (a) Determinare α .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione di X .
- (c) Trovare una funzione $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ crescente tale che posto $T := g(Y)$ si abbia $X \sim T$.

Soluzione

(a) Affinché f_X sia una densità di una variabile aleatoria deve soddisfare $f_X(x) \geq 0$ per ogni x e $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$. Dunque

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_1^{\alpha} \frac{1}{x} dx = \ln(\alpha)$$

quindi $\boxed{\alpha = e}$.

$$(b) F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \ln(x) & 1 \leq x < e \\ 1 & e \leq x \end{cases}$$

(c) Per trovare la funzione g bisogna trovare la pseudoinversa della funzione di ripartizione, nel nostro caso la funzione F_X è invertibile sul codominio $(0, 1)$ e si ha $\boxed{g(y) = e^y}$.