

Esercitazione del 24/03/2014

Probabilità e Statistica

David Barbato

Esercizi dal libro di testo: 1.13, 1.14, 1.27, 1.28, 1.32, 1.35, 1.36, 1.38, 1.40

Esercizio 1

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0, 1]$) di dare testa e una probabilità $1 - p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B .

- (a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (Il risultato dipende dal parametro p .)
- (b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
- (c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
- (d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?
- (e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
- (f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Esercizio 2

Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che siano entrambi dispari?
- (b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 2?
- (c) Calcolare la probabilità che la somma sia 2.
- (d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 5.
- (e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 3.
- (f) Sapendo che la somma è uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
- (g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Esercizio 3

Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.

- (a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
- (b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno

due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?

(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniera casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Esercizio 4

Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte. (esattamente 3 volte)
- (b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
- (c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
- (d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
- (e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
- (f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
- (g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
- (h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
- (i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
- (l) Qual'è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Svolgimento:

Esercizio 1

Consideriamo i seguenti eventi:

T = "Il risultato del lancio della moneta è testa";

A = "La pallina viene estratta dall'urna A";

B = "La pallina viene estratta dall'urna B";

R = "La pallina estratta è Rossa";

N = "La pallina estratta è Nera";

B_i = "La pallina estratta è Bianca";

Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1 - p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

$$(a) P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$$

$$(b) P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$$

$$(c) P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$$

$$\text{Utilizzando Bayes } P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$$

$$(d) \frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

$$(e) \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall p \in [0, 1]$$

$$(f) \frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

Esercizio 2

$$(a) \frac{1}{4}, (b) \frac{11}{36}, (c) \frac{1}{36}, (d) \frac{5}{18}, (e) \frac{1}{9}, (f) \frac{2}{5}, (g) \frac{7}{15}.$$

Esercizio 3

(a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità $1/60$.

Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \dots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \dots + \frac{1}{3600}$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è $1/60$.

(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" = $60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51$

"Casi possibili" = 60^{10}

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:

$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"

$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"

$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \quad P(A_2) = \frac{1}{4} \quad P(E|A_1) = 0.7 \quad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 4

(a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{1}{8}$, (f) $\frac{1}{48}$, (g) $\frac{3}{8}$, (h) $\frac{63}{384}$, (i) $\frac{3}{8}$, (l) $\frac{77}{192}$,