

# Esercitazione del 07/04/2014

## Probabilità e Statistica

David Barbato

I quesiti contrassegnati con un asterisco (\*) saranno accessibili dalla settima settimana.

### Esercizio 1

Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
- (b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
- (c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
- (d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
- (e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
- (f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
- (i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
- (l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

### Esercizio 2

È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:

- (a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
- (b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
- (c)\* Indichiamo con  $Z$  il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di  $Z$ ?
- (d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

### Esercizio 3

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con  $A$  il risultato del lancio del dado di Alessia e con  $D$  il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione:  $P(A = 6) = 0.3$ ,  $P(A = 5) = 0.2$ ,  $P(A = 4) = 0.2$ ,  $P(A = 3) = 0.1$ ,

$$P(A = 2) = 0.1, P(A = 1) = 0.1.$$

- (a) Calcolare  $P(A > 3)$ .
- (b)\* Calcolare  $\mathbb{E}[A]$ .
- (c) Calcolare  $P(D > 3)$ .
- (d) Calcolare  $P(A = 6, D = 6)$ .
- (e) Calcolare  $P(A = 5, D = 4)$ .
- (f) Calcolare  $P(A > 3, D > 3)$ .
- (g) Calcolare  $P(A = 6 | A > 3)$ .
- (h) Calcolare  $P(A = 6 | D > 3)$ .
- (i) Calcolare  $P(A + D = 11)$ .
- (l) Calcolare  $P(A \cdot D > 20)$ .
- (m) Calcolare  $P(A > D)$ .
- (n) Calcolare  $P(A = 6 | A > D)$ .

#### Esercizio 4

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

- (a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?
- (b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?
- (c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?
- (d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?
- (e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?
- (f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?
- (g)\* Sia  $X_A$  il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale  $\mathbb{E}[X_A]$ ?
- (h)\* Sia  $X_B$  il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale  $\mathbb{E}[X_B]$ ?
- (i)\* Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con  $X$  il valore della carta. Quanto vale  $\mathbb{E}[X]$ ?

#### Esercizio 5

Siano  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  due spazi misurabili, sia  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Mostrare che per ogni  $E \in \mathcal{A}$  e per ogni  $x \in \Omega_1$  l'insieme  $\{y \in \Omega_2 | (x, y) \in E\}$  appartiene a  $\mathcal{A}_2$ , e in maniera simile per ogni  $y \in \Omega_2$  l'insieme  $\{x \in \Omega_1 | (x, y) \in E\}$  appartiene a  $\mathcal{A}_1$ .

**Soluzioni.**

**Esercizio 1** (a)  $\frac{1}{4}$ , (b)  $\frac{1}{2}$ , (c)  $\frac{1}{16}$ , (d)  $\frac{3}{4}$ , (e)  $\frac{1}{128}$ , (f)  $\frac{1}{32}$ , (g) 0, (h)  $\frac{5}{16}$ ,  
 (i)  $\frac{2}{3}$ , (l)  $\frac{4}{7}$ ,

**Esercizio 2** (a)  $(1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378$ , (b)  $\simeq 0.33$ , (c) 0.8,  
 (d)  $\frac{7}{8}$ ,

**Esercizio 3**

	<i>A</i>	<i>L</i>	<i>E</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>I</i>	<i>A</i>
<i>D</i>		1	2	3	4	5	6
<i>A</i>	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
<i>N</i>	2	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
<i>I</i>	3	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
<i>E</i>	4	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
<i>L</i>	5	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
<i>E</i>	6	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$

(a)  $\frac{7}{10}$ , (b)  $\frac{21}{5}$ , (c)  $\frac{1}{2}$ , (d)  $\frac{1}{20}$ , (e)  $\frac{1}{30}$ , (f)  $\frac{7}{20}$ , (g)  $\frac{3}{7}$ , (h)  $\frac{3}{10}$ , (i)  $\frac{1}{12}$ , (l)  $\frac{1}{4}$ , (m)  $\frac{8}{15}$ ,  
 (n)  $\frac{15}{32}$

**Esercizio 4** (a)  $\frac{1}{12}$ , (b)  $\frac{1}{16}$ , (c)  $\frac{7}{48}$ , (d)  $\frac{11}{24}$ , (e)  $\frac{4}{7}$ , (f)  $\frac{8}{11}$ , (g)  $\frac{7}{2}$ , (h)  $\frac{13}{2}$ ,  
 (i) 5.