Esercitazione del 07/04/2014
Probabilità e Statistica
esercizi extra

David Barbato

Esercizio 1 Siano $\mathcal{C}_1$,... $\mathcal{C}_5$ le seguenti collezioni di sottinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &:= \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ insieme aperto di } \mathbb{R}\ \} \\
\mathcal{C}_2 &:= \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_3 &:= \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_4 &:= \{(-\infty,c) \mid c \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{C}_5 &:= \{(-\infty,c] \mid c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

mostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \sigma(\mathcal{C}_4) = \sigma(\mathcal{C}_5)$.

Esercizio 2 Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, sia X una funzione da Ω in R e sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dimostrare che se per ogni $A \in \mathcal{C}$ vale $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ allora X è misurabile rispetto alla σ-algebra $\sigma(\mathcal{C})$.

Esercizio 3 Siano $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un spazio di probabilità e X_1 e X_2 due variabili aleatorie reali su Ω. Siano X e Y le funzioni definite da:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &:= \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) \qquad && \forall \omega \in \Omega \\
Y(\omega) &:= \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) \qquad && \forall \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

Dimostrare che X e Y sono variabili aleatorie.

Esercizio 4 Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali. Supponiamo che le variabili aleatorie siano equilimitate, cioè supponiamo che esista una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\omega \in \Omega$ valga la disuguaglianza $|X_n(\omega)| \leq M$. Consideriamo le seguenti funzioni

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &:= \sup\nolimits_n \{X_n(\omega)\} \\
Z(\omega) &:= \inf\nolimits_n \{X_n(\omega)\} \\
T(\omega) &:= \limsup\nolimits_n \{X_n(\omega)\} \\
W(\omega) &:= \liminf\nolimits_n \{X_n(\omega)\}
\end{aligned}$$

Dimostrare che X, Y, W e T sono variabili aleatorie.

Esercizio 5 Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali su Ω. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di Ω:

$$\begin{aligned}
A &:= \{\omega \in \Omega \mid \limsup\nolimits_n X_n(\omega) = +\infty\} \\
B &:= \{\omega \in \Omega \mid \liminf\nolimits_n X_n(\omega) = +\infty\}
\end{aligned}$$

Dimostrare che A e B sono eventi.

Esercizio 6 Siano $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un spazio di probabilità e X_1 e X_2 due variabili aleatorie reali su Ω. Siano $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_1 \cdot X_2$ cioè:

$$\begin{aligned} X(\omega) &:= X_1(\omega) + X_2(\omega) \qquad && \forall \omega \in \Omega \\ Y(\omega) &:= X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \qquad && \forall \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Dimostrare che X e Y sono variabili aleatorie.