

Esercitazione del 14/04/2014 seconda parte

Probabilità e Statistica

David Barbato

Esercizio 1. Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrata (1900 cc, 2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:

- (a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?
- (b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?
- (c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?

Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).

- (d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico? [Accessibile dalla settima settimana]
- (e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?

Esercizio 2. Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il 60% di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il 20% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 20% di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il 10% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 30% di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con X_1 , X_2 e X (risp. Y_1, Y_2, Y) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).

- (a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?
- (b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?
- (c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?
- (d) Quale è la distribuzione di X ? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)
- (e) Quale è la distribuzione di Y ?

Esercizio 3. Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con X_1 e X_2 il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.

(a) Quali sono le distribuzioni di X_1 e X_2 ?

(b) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?

(c)* Sia n un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui n lanci (invece di 2) e Fortunata effettui $n + 1$ lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di n la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di n le due probabilità sono uguali?

Esercizio 4. Ad un mazzo da poker di 52 carte, aggiungiamo due jolly. Disponiamo le 54 carte a caso, poi partendo dalla prima riveliamo carte finché non riveliamo un jolly. Sia N la variabile aleatoria che indica il numero di carte rivelate, (chiaramente si avrà $1 \leq N \leq 53$). Sia X la $(N + 1)$ -esima carta (X è la prima carta dopo il primo jolly).

(a) Qual è la probabilità che le prime due carte siano jolly? (Calcolare $P(N = 1, X = \text{jolly})$)

(b) Qual è la distribuzione di N . (Calcolare $P(N = n)$).

(c)** Qual è la probabilità che X sia il due di picche?

1 Soluzioni

Esercizio 1 (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con X_1 e X_2 le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento $B := A^c =$ "tutti e 6 i clienti hanno

scelto autovetture diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" = $45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40$

"Casi possibili" = 45^6

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con $(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,100\}}$ le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'esima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$ denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \dots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:

$A_1 :=$ "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"

$A_2 :=$ "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"

$E :=$ "È stato scelto il climatizzatore automatico".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \quad P(A_2) = \frac{2}{3} \quad P(E|A_1) = 0.60 \quad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Esercizio 2

- (a) 16%
- (b) 8%
- (c) 20%
- (d) $P(X = 200) = 4\%$, $P(X = 150) = 8\%$, $P(X = 125) = 8\%$, $P(X = 100) = 20\%$, $P(X = 75) = 8\%$, $P(X = 50) = 20\%$, $P(X = 25) = 16\%$, $P(X = 0) = 16\%$,
- (e) $P(X = 200) = 1\%$, $P(X = 150) = 4\%$, $P(X = 125) = 6\%$, $P(X = 100) = 12\%$, $P(X = 75) = 12\%$, $P(X = 50) = 25\%$, $P(X = 25) = 24\%$, $P(X = 0) = 16\%$,

Esercizio 3

- (a) $X_1 \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$, $X_2 \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2})$,
- (b) $P(X_1 \geq X_2) = \frac{1}{2}$

Esercizio 4

- (a) $\frac{1}{1431}$,
- (b) $P(N = n) = \frac{54-n}{1431}$