Esercitazione del 28/04/2014
Probabilità e Statistica

David Barbato

Esercizi dal libro di testo: 3.7, 3.8.

Esercizio 1. *esercizio 3.9 del libro di testo con*

$$m_n := \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right]$$

Esercizio 2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilità dimostrare che:*
(a) se $0 < p \leq q < \infty$ *allora* $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$
(b) se $X,\ Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *allora* $X \cdot Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Esercizio 3. *Sia* X*,* Y *e* Z *tre variabili aleatorie discrete tali che:* $P(X = 100) = 1$*,* $P(Y = 99) = P(Y = 100) = P(Y = 101) = \frac{1}{3}$ *e* $P(Z = 50) = P(Z = 100) = P(Z = 150) = \frac{1}{3}$*.*
(a) Calcolare media e varianza di X*.*
(b) Calcolare media e varianza di Y*.*
(c) Calcolare media e varianza di Z*.*

Esercizio 4. *Sia* X*,* Y *due variabili aleatorie in* L^2*. Dimostrare che:*

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

(Utilizzare l'uguaglianza $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y)$ *e la bilinearità della covarianza).*

Esercizio 5. *Sia* X*,* Y *due variabili aleatorie in* L^2 *indipendenti. Dimostrare che:*
(a) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
(b) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Esercizio 6. *Siano* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variabili aleatorie in* L^2 *indipendenti. Dimostrare che:*

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Esercizio 7. *Sia* X *variabili aleatoria bernoullina di parametro* $p \in [0, 1]$ *dimostrare che:*

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$$

Esercizio 8. *Siano* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variabili aleatorie bernoulliane indipendenti di parametro* $p \in [0, 1]$*. Sia* $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$*,* $(Y \sim Bin(n, p))$ *dimostrare che:*

$$\mathrm{Var}(Y) = np(1 - p)$$