

Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
16/06/2015

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 4 punti.)

Un dado regolare a sei facce viene lanciato due volte. Siano X_1 e X_2 i risultati dei due lanci. Sia $S := X_1 + X_2$ la loro somma.

- (a) Calcolare la media e la varianza di X_1 .
- (b) Calcolare la media e la varianza di S .
- (c) Calcolare la probabilità $P(X_1 = 5|S = 10)$.
- (d) Calcolare la probabilità $P(S = 10|S > 7)$.

Esercizio 2. (V. 6 punti.)

Una macchina per il confezionamento del caffè riempie i sacchetti con una quantità casuale di caffè distribuita normalmente, con media μ e varianza nota $\sigma^2 = (2gr)^2$. Supponiamo di osservare la seguente serie di misurazioni in gr:

247	251	249	249	253
248	252	249	248	251
247	255	250	251	247
254	249	245	249	247
Totale 4991				

- (a) Determinare un intervallo di confidenza centrato per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
- (b) Determinare un intervallo di confidenza destro per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
- (d) Determinare un intervallo di confidenza sinistro per μ con livello di confidenza $\gamma = 99\%$.

Esercizio 3. (V. 2+2+4 punti.)

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim \text{Bin}(n = 4, p = \frac{1}{2})$. Definiamo inoltre $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} Y_i &:= X_i - 2 & \forall i \in \mathbb{N} \\ T_n &:= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} Y_i & \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- (a) Calcolare media e varianza di Y_i .
- (b) Calcolare media e varianza di T_n al variare di $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{T_n}{n} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard.

Esercizio 4. (V. 4 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie reali discrete tali che

$$\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\mathbb{E}[Y] = 2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 3$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = 4$$

dimostrare che $\mathbb{E}[XY] = 2$.

Esercizio 5. (V. 8+4* punti.)

Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$, Y abbia distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \ln(2)$ e infine Z abbia distribuzione uniforme sull'intervallo $(-1, 1)$. Siano $T := X \cdot Z$ e $W := \min\{Y, Z\}$.

- (a) Determinare media e varianza di T .
- (b) Calcolare $P(T < Z)$.
- (c) Calcolare $P(W = 0)$.
- (d) Calcolare la funzione di ripartizione F_W di W . E fare un grafico di $y = F_W(x)$.
- (e)* Data U variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1)$ determinare una funzione $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ non decrescente tale che si abbia $g(U) \sim W$.
- (f)* Utilizzando il risultato del quesito (e) calcolare $\mathbb{E}[W]$.