Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
07/07/2015

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Riccardo si cimenta nel suo videogioco preferito. Il gioco consiste di 3 schermate successive, di difficoltà crescente. Se il concorrente supera indenne una schermata, può passare a quella succesiva altrimenti ha perso. Se supera indenne tutte e tre le schermate vince il gioco. Riccardo ha una probabilità 0.5 di superare la prima schermata. Una volta superata la prima schermata ha una probabilità 0.3 di superare anche la seconda. Infine se supera le prime due schermate ha probabilità 0.2 di superare indenne anche la terza schermata e vincere il gioco.
(a) Qual è la probabilità che riccardo vinca il gioco?
(b) Sapendo che riccardo non ha vinto il gioco qual è la probabilità che sia stato eliminato alla seconda schermata?

Esercizio 2. (V. 4 punti.)
Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti con distribuzione normale di media μ e varianza σ^2. Sia $\overline{X} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la media campionaria. Qual è il valore massimo che può assumere $P(\overline{X} > 12)$ al variare di $\mu \in [5, 10]$, $\sigma^2 \in [5, 10]$ e $n \in \{5, 6, \ldots, 10\}$?

Esercizio 3. (V. 4 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia una v.a. binomiale di parametri $(2, \frac{1}{2})$ mentre Y sia una variabile aleatoria normale di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Sia infine $T = \max(X, Y)$.
(a) Calcolare la probabilità $P(T = 1)$.
(b) Calcoalre la funzione di ripartizione di T. (Indicare con Φ la funzione di ripartizione di una normale standard.)

Esercizio 4. (V. 4 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione bernoulliana di parametro $\frac{1}{2}$. Definiamo inoltre $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ e $T_n := X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$

(a) Calcolare la seguente probabilità:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{T_1 + \ldots + T_n}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

(b) Calcolare la seguente probabilità:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \cdot \ldots \cdot S_n}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

Esercizio 5. (V. 10 punti.)
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che abbiano le seguenti distribuzioni: $X \sim Unif(-10, -5)$; $Y \sim Esp(\lambda = \frac{1}{5})$; $Z \sim Bern(p = \frac{2}{3})$. Sia infine T la variabile aletoria di seguito definita:

$$T := \begin{cases} X & \text{se } Z = 0 \\ Y & \text{se } Z = 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T.
(b) La variabile aleatoria T è discreta? In caso di risposta affermativa calcolarne la densità.
(c) La variabile aleatoria T è assolutamente continua? In caso di risposta affermativa calcolarne la densità.
(d) Quanto vale $\mathbb{E}[T]$?
(e) Quanto vale $COV(T, Z)$?

Esercizio 6. (V. 4+4* punti.)
Per quali $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ esistono due variabili aleatorie discrete X e Y tali che $COV(X,Y) = a$ e $CORR(X,Y) = b$. Dove la correlazione è data da $CORR(X,Y) := \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}}$. Per i valori $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per i quali tali v.a. non esistono occorre fornire una dimostrazione mentre per i valori di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esistono occorre fornire un esempio.