Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
07/07/2015

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Riccardo si cimenta nel suo videogioco preferito. Il gioco consiste di 3 schermate successive, di difficoltà crescente. Se il concorrente supera indenne una schermata, può passare a quella succesiva altrimenti ha perso. Se supera indenne tutte e tre le schermate vince il gioco. Riccardo ha una probabilità 0.5 di superare la prima schermata. Una volta superata la prima schermata ha una probabilità 0.3 di superare anche la seconda. Infine se supera le prime due schermate ha probabilità 0.2 di superare indenne anche la terza schermata e vincere il gioco.
(a) Qual è la probabilità che riccardo vinca il gioco?
(b) Sapendo che riccardo non ha vinto il gioco qual è la probabilità che sia stato eliminato alla seconda schermata?

Soluzione
(a) $\frac{3}{100}$
(b) $\frac{35}{97}$

Esercizio 2. (V. 4 punti.)
Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti con distribuzione normale di media μ e varianza σ^2. Sia $\overline{X} := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ la media campionaria. Qual è il valore massimo che può assumere $P(\overline{X} > 12)$ al variare di $\mu \in [5, 10]$, $\sigma^2 \in [5, 10]$ e $n \in \{5, 6, \ldots, 10\}$?

Soluzione
$P(\overline{X} > 12) = 1 - \Phi\left(\frac{12-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ Il valore massimo si ottiene per $\mu = 10$, $\sigma = 10$, $n = 5$.
$P(\overline{X} > 12) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) \simeq 0.079$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia una v.a. binomiale di parametri $(2, \frac{1}{2})$ mentre Y sia una variabile aleatoria normale di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Sia infine $T = \max(X, Y)$.
(a) Calcolare la probabilità $P(T = 1)$.
(b) Calcoalre la funzione di ripartizione di T. (Indicare con Φ la funzione di ripartizione di una normale standard.)

Soluzione
(a)$P(T = 1) = \frac{1}{4}$
(b)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4}\Phi\left(\frac{t-1}{2}\right) & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{4}\Phi\left(\frac{t-1}{2}\right) & 1 \leq t < 2 \\ \Phi\left(\frac{t-1}{2}\right) & 2 \leq t \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 4 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione bernoulliana di parametro $\frac{1}{2}$. Definiamo inoltre $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ e $T_n := X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$
(a) Calcolare la seguente probabilità:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{T_1 + \ldots + T_n}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

(b) Calcolare la seguente probabilità:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \cdot \ldots \cdot S_n}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

Soluzione
(a) Le variabili $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti e bernoulliane di parametro $\frac{1}{2}$. Con probabilità 1 esiste un indice i per cui $X_i = 0$. L'idea iniziale della dimostrazione è che se si verifica $X_i = 0$ allora per ogni $k \geq i$ vale $T_k = 0$.
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ lo spazio su cui è definita la successione di v.a. $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Per ogni k sia A_k l'evento $\{X_k = 0 \text{ e } X_i = 1 \text{ per ogni } i < k\}$. Se $\omega \in A_k$ allora si ha

$$T_1(\omega) = 1, \ldots, T_{k-1}(\omega) = 1, T_k(\omega) = 0, T_{k+1}(\omega) = 0, \ldots$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(\omega) + \ldots + T_n(\omega)}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \forall \omega \in A_k$$

poiché $P(\cup_k A_k) = 1$ allora si ha

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{T_1 + \ldots + T_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = 0$$

(b) La successione S_n è non decrescente. Il punto chiave è se $S_1(\omega) = X_1(\omega) = 0$ oppure se $S_1(\omega) = X_1(\omega) = 1$.
Se $S_1(\omega) = 0$ allora anche $S_1(\omega) \cdot \ldots \cdot S_n(\omega) = 0$ mentre se $S_1(\omega) = 1$ allora $S_1(\omega) \cdot \ldots \cdot S_n(\omega) \geq 1$ ed eventualmente potrà crescere ulteriormente.
Sia B_0 l'evento $X_1 = 0$ e B_1 l'evento $X_1 = 1$. $P(B_0) = P(B_1) = \frac{1}{2}$.
Se $\omega \in B_0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1(\omega) \cdot \ldots \cdot S_n(\omega)}{\sqrt{n}} = 0$$

Per quanto riguarda B_1 l'idea è di procedere come in (a) nel senso che prima o poi con probabilità 1 ci sarà un indice $i > 1$ tale che $X_i = 1$.
Sia C_k l'evento $\{X_1 = 1 \text{ e } X_k = 1\}$ con k maggiore di 1.
Se $\omega \in C_k$ allora si ha $S_i(\omega) \geq 2$ per ogni $i \geq k$ e $S_i(\omega) \geq 1$ per ogni $i < k$ quindi si ha $S_1(\omega) \cdot \ldots \cdot S_n(\omega) \geq 2^{n-k}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1(\omega) \cdot \ldots \cdot S_n(\omega)}{\sqrt{n}} = \infty \qquad \forall \omega \in C_k$$

poiché $P(\cup_k C_k|B) = 1$ allora si ha

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \cdot \ldots \cdot S_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5. (V. 10 punti.)
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che abbiano le seguenti distribuzioni: $X \sim Unif(-10, -5)$; $Y \sim Esp(\lambda = \frac{1}{5})$; $Z \sim Bern(p = \frac{2}{3})$. Sia infine T la variabile aletoria di seguito definita:

$$T := \begin{cases} X & \text{se } Z = 0 \\ Y & \text{se } Z = 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T.
(b) La variabile aleatoria T è discreta? In caso di risposta affermativa calcolarne la densità.
(c) La variabile aleatoria T è assolutamente continua? In caso di risposta affermativa calcolarne la densità.
(d) Quanto vale $\mathbb{E}[T]$?
(e) Quanto vale $COV(T, Z)$?

Soluzione
(a)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < -10 \\ \frac{t+10}{15} & -10 \leq t < -5 \\ \frac{1}{3} & -5 \leq t < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-\lambda t} & 0 \leq t \end{cases}$$

(b) Poiché la funzione di ripartizione F_T è continua allora per ogni t si ha $P(T = t) = 0$, quindi la variabile aleatoria T non può essere discreta.
(c) La funzione di ripartizione F_T è continua ed è derivabili ovunque eccetto i punti -10, -5 e 0. Affinché sia assolutamente continua occorre calcolarne la derivata $f_T(t) := \frac{d}{dt}F_T(t)$ e verificare che vale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt = 1$.

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{15} & -10 \leq t < -5 \\ \frac{2}{3}\lambda e^{-\lambda t} & 0 \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt = \int_{-10}^{-5} \frac{1}{15}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{3}\lambda e^{-\lambda t}dt = 1$$

(d)

$$\mathbb{E}[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)dt = \int_{-10}^{-5} \frac{t}{15}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{2t}{3}\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{5}{6}$$

(e) $COV(T, Z) = \mathbb{E}[TZ] - \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[Z]$, sappiamo che $\mathbb{E}[T] = \frac{5}{6}$ e $\mathbb{E}[T] = \frac{2}{3}$, occorre calcolare $\mathbb{E}[TZ]$. Sappiamo che $Z = 0$ se $T < 0$ mentre $Z = 1$ se $T \geq 0$ dunque vale

$$TZ = g(T) = \begin{cases} 0 & \text{se } T < 0 \\ T & \text{se } T \geq 0 \end{cases}$$

Quindi

$$E[TZ] = E[g(T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_T(t) dt = \frac{10}{3}$$

da cui si ricava

$$COV(T, Z) = \frac{25}{9}$$

Esercizio 6. (V. 4+4* punti.)
Per quali $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ esistono due variabili aleatorie discrete X e Y tali che $COV(X,Y) = a$ e $CORR(X,Y) = b$. Dove la correlazione è data da $CORR(X,Y) := \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}}$. Per i valori $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per i quali tali v.a. non esistono occorre fornire una dimostrazione mentre per i valori di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esistono occorre fornire un esempio.

Soluzione
Se X e Y ammettono covarianza e correlazione allora deve valere $b = \frac{a}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}}$ da cui si ottiene

$$a > 0 \;\Leftrightarrow\; b > 0 \;, \qquad a = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 0 \;, \qquad a < 0 \;\Leftrightarrow\; b < 0 \quad (1)$$

inoltre poiché la correlazione deve essere compresa tra -1 e 1 si ha anche:

$$b \in [-1, 1] \;. \qquad (2)$$

Costruiamo ora degli esempi per mostrare che effettivamente le restrizioni (1) e (2) sono tutte quelle possibile. Ci sono due casi.
Il caso $a = b = 0$ è semplice basta prendere due v.a. indipendenti cosicché vale $COV(X,Y) == 0$, $CORR(X,Y) = 0$.
Consideriamo il CASO $a \cdot b > 0$ e $b \in [-1,1]$.
Siano T e W due v.a. indipendenti tali che

$$P(T = -1) = P(T = 1) = P(W = -1) = P(W = 1) = \frac{1}{2}$$

allora

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[W] = 0 \;, \qquad \mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[W^2] = VAR(T) = VAR(W) = 1$$

Siano

$$X := T \qquad Y := \alpha T + \beta W$$

con $\alpha \neq 0$. Allora vale

$$COV(X,Y) = \alpha \qquad CORR(X,Y) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{cases}$$

otteniamo una soluzione

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \frac{a}{b}\sqrt{1 - b^2} \end{cases}$$

che soddisfa le ipotesi richieste.