Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
02/09/2015

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1. (V. 6 punti.)
Elena ed Elisabetta giocano a dadi ciascuna lancia un dado regolare a sei facce, chi ottiene il risultato maggiore vince un euro e chi ottiene quello minore lo perde, in caso di esiti uguali non vince nessuno. Indichiamo con D_1 risp. D_2 il risultato del lancio di Elena risp. Elisabetta, ed indichiamo con X la somma vinta da Elena. (X può assumere i valori $1, 0, -1$.)

(a) Calcolare la funzione di densità della v.a. X.
(b) Calcolare la vincita media di Elena.
(c) Qual è la probabilità che Elena vinca un euro sapendo che ha ottenuto un risultato pari?

Esercizio 2. (V. 6 punti.)
Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(-1, 1)$. Sia $Y := g(X)$ dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(|x|) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. Y.
(c) La variabile aleatoria Y appartiene ad una distribuzione nota? In caso affermativo indicare la distribuzione e gli eventuali parametri.

Esercizio 3. (V. 5 punti.)
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia una distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$, Y sia una variabile aleatoria discreta uniforme sull'insieme $\{0,1\}$ e Z sia una variabile aleatoria discreta uniforme sull'insieme $\{-7,-5,-3\}$. Sia infine $S = X + Y + Z$.
(a) Calcolare la probabilità $P(S \in (-6,-5))$.
(b) Calcolare la probabilità $P(S < -4)$.
(c) Calcolare la probabilità $P(S < -\frac{7}{2})$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione di S.
(e) La variabile aleatoria S appartiene ad una famiglia di variabili aleatorie note? In caso di risposta affermativa indicare il valore degli eventuali parametri.

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media μ e varianza $\sigma^2 > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo inoltre $Y_n := X_n + X_{n+1}$ e $Z_n := Y_n \cdot Y_{n+1}$.
(a) Le variabili aleatorie $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti? (Occorre o dimostrare che sono indipendenti o dimostrare che non possono esserlo.)
(b) Cosa si può dire del seguente limite?

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{Z_n}{N}$$

Esercizio 5. (V. 4+4* punti.)

(a) Mostrare un esempio di densità discreta f_X associata ad una v.a. X tale che $\mathbb{E}[X] = 0$ e $VAR(X) = 1$.
(b) Mostrare un esempio di due v.a. X e Y tali che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ e $E[XY] = 1$.
(c)* Mostrare un esempio di tre v.a. X, Y e Z tali che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ] = 0$ e $E[XYZ] = 1$.
(d)* Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ esistono n variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ tali che per ogni $J \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$ non vuoto si ha $\mathbb{E}[\prod_{i \in J} X_i] = 0$ e $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} X_i] = 1$?

Esercizio 6. (V. 4.)
Sia X una variabile aleatoria discreta e sia $Y = |X|$, supponiamo inoltre che Y abbia una distribuzione binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 2$. Dimostrare che la varianza di X è maggiore o uguale a quella di Y.