Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
22/09/2015

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 6 punti.)
Supponiamo di avere 6 urne numerate da 1 a 6. Ciascuna urna contiene 10 palline. La prima urna contiene una pallina rossa e nove bianche la seconda due palline rosse e otto bianche ... la i-esima urna contiene i palline rosse e $10 - i$ bianche. Lanciamo un dado regolare, sia X il risultato del lancio del dado. Poi estraiamo 7 biglie senza reinserimanto dall'urna X. Sia Y il numero di biglie rosse estratte.
(a) Calcolare $P(Y = 3|X = 4)$.
(b) Calcolare $P(Y = 4|X = 3)$.
(c) Calcolare $P(Y = 6)$.
(d) Calcolare $P(Y = 3)$.
(e) Calcolare $P(X = 4|Y = 3)$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 2. (V. 6 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni: $X \sim N(1,4)$; $Y \sim Bin(2, \frac{1}{2})$. Sia $T := X \cdot Y$ e sia $S := X + Y$.
(a) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria T.
(b) Calcolare la probabilità $P(T = S)$.
(c) Calcolare la probabilità $P(T > S)$.

Esercizio 3. (V. 6 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim Exp(\lambda = 1)$. Definiamo inoltre le variabili

$$Y_n := \#\{i \in \{1, 2, \dots, n\} | X_n > c \ln(n)\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Qual è la distribuzione di Y_n? Indicare il valore degli eventuali parametri.
(b) Per quali valori di c si ha $\lim_{n\to\infty} P(Y_n > 0) = 1$?
(c) Per quali valori di c si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]) = 0$?

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Sia X una variabile aleatoria con la seguente densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Sia inoltre U una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.
(a) Calcolare la funzine di ripartizione F_X.
(b) Calcolare la media della variabile aleatoria X.
(c) Determinare una funzione $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ non decrescente tale che si abbia $g(U) \sim W$.

Esercizio 5. (V. 6 punti.) Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. uniformemente distribuite sull'insieme $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ (cioè $P(X = \frac{1}{2}) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$). Definiamo inoltre le seguenti variabili

$$Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := Y_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calcolare (se esiste) il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} P(T_n > 2)$$

Esercizio 6. (V. 5* punti.)
Determinare se esiste una variabile aleatoria X tale che

$$P(X > 0) = 1 \qquad \mathbb{E}[X] = 1 \qquad \mathbb{E}[X^2] = 3 \qquad \mathbb{E}[X^3] = 3$$