

Prova scritta di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
25/01/2016

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 3 punti.)

Le 52 carte di un mazzo di carte francesi sono disposte in ordine casuale.

- (a) Qual è la probabilità che le prime 4 siano degli assi?
- (b) Qual è la probabilità che le ultime 4 siano di picche?
- (c) Qual è la probabilità che la regina di cuori e il re di picche siano consecutivi (in qualsiasi ordine)?

Esercizio 2. (V. 6 punti.)

Una società incaricata di effettuare la misurazione dei nitrati nell'acqua esegue 5 prove indipendenti e ottiene i seguenti risultati (in mg/L)

25.6	25.3	24.2	24.8	25.1
------	------	------	------	------

Sapendo che la deviazione standard associata alla singola prova è $\sigma = 0.4\text{mg/L}$ rispondere alle seguenti domande:

- (a) Calcolare un intervallo di confidenza centrato con confidenza del 95%.
- (b) Quante prove sarebbero state necessarie se si voleva ottenere un intervallo di confidenza al 95% centrato con ampiezza minore di 0.5 mg/L?

Esercizio 3. (V. 8 punti.)

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim \text{geom}(p = \frac{1}{2})$. Definiamo inoltre per ogni n

$$Y_n := X_n - 2 \qquad S_n := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

- (a) Calcolare media e varianza di Y_n .
- (b) Calcolare media e varianza di S_n .
- (c) Cosa si può dire del limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$?
- (d) Dato $x \in \mathbb{R}$, quanto vale il limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x)$?

Esercizio 4. (V. 10 punti.)

Siano X , Y e Z variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:

$$X \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{3}\right) \quad Y \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right) \quad Z \sim \text{esp}(\lambda = 2)$$

Siano inoltre $M = X \cdot Y \cdot Z$, $S = X + Y + Z$, $W = \min(X, Y, Z)$

- (a) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria S .
- (b) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria M .
- (c) Calcolare $P(W = 0)$ e $P(W = 1)$.
- (d) Calcolare la funzione di ripartizione di W .
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[W]$.

Esercizio 5. (V. 6 punti.) Per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ esiste una variabile aleatoria X a valori in \mathbb{Z} tale che

$$\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\text{VAR}[X] < 1$$

$$P(X = n) < c \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

