Prova d'esame di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
10/04/2015

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 1 punti.)

Enunciare la proprietà di linearità del valore atteso di variabili aleatorie discrete. (Senza dimostrazione)

Esercizio 2. (V. 1 punti.)

Siano A e B due eventi tali che:

$$P(A \cap B) = P(A^c \cap B) = P(A \cap B^c) = P(A^c \cap B^c)$$

(a) Quanto vale $P(A \cup B)$? Gli eventi A e B^c sono indipendenti?

Esercizio 3. (V. 7 punti.)

[Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni.]

Una società produttrice di uova di cioccolato decide di promuovere le vendite inserendo in ogni uovo una sorpresa rappresentante una delle seguenti 5 principesse delle fiabe (*Biancaneve*, *Cenerentola*, *Ariel*, *Rapunzel*, *Aurora*). Beatrice riceve 3 di queste uova e decide di aprirne uno al giorno. Supponiamo che per ciascun uovo la probabilità di trovare una qualsiasi delle 5 principesse sia la medesima e che tali probabilità siano indipendenti.

- (a) Qual è la probabilità che nelle tre uova ci siano nell'ordine *Cenerentola*, *Rapunzel* e *Biancaneve*?
- (b) Qual è la probabilità che nelle tre uova ci siano in un ordine qualsiasi *Cenerentola*, *Rapunzel* e *Biancaneve*?
- (c) Qual è la probabilità che almeno uno delle tre uova contenga *Ariel*?
- (d) Qual è la probabilità che almeno uno delle tre uova contenga *Ariel* sapendo che il primo uovo non contiene *Biancaneve*?
- (e) Qual è la probabilità che almeno uno delle tre uova contenga *Cenerentola* sapendo che sono uscite 3 principesse diverse?
- (f) Qual è la probabilità che siano uscite esattamente due *Rapunzel*?
- (g) Qual è la probabilità che almeno uno delle tre uova contenga *Aurora* sapendo che almeno un uovo contiene *Rapunzel*?

Esercizio 4. (V. 5 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, sia $Z := X \cdot Y$ e sia $p \in [0, 1]$. Supponiamo che $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = +1) = \frac{1}{3}$ e $P(Y = 1) = 1 - P(Y = -1) = p$.

- (a) Calcolare la media e la varianza di X .
- (b) Calcolare la media e la varianza di Y .
- (c) Calcolare la densità discreta di Z .
- (d) Le variabili aleatorie X e Z sono indipendenti? (Giustificare la risposta.)
- (e) Le variabili aleatorie Y e Z sono indipendenti? (Giustificare la risposta.)

Esercizio 5. (V. 2 punti.)

Fornire, se esiste, un esempio di due variabili aleatorie discrete X, Y indipendenti tali che posto $Z = X + Y$ si abbia:

- $P(X = n) > 0 \iff n \in \{0, 1, 2\}$
- $P(Y = n) > 0 \iff n \in \{0, 1, 2\}$
- $P(Z = 0) < P(Z = 1) < P(Z = 2) < P(Z = 3) < P(Z = 4)$