

Secondo compito di  
**Probabilità e Statistica**  
Laurea Triennale in Matematica  
16/06/2015

COGNOME e NOME .....

N. MATRICOLA.....

**Esercizio 1.** (V. 4 punti.)

Dimostrare la seguente proposizione:

**Proposizione.** *Sia  $\{X_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  una famiglia di  $n$  variabili aleatorie indipendenti, supponiamo che ciascuna variabile aleatoria  $X_i$  abbia distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda_i > 0$ . Se poniamo  $W := \min\{X_1, \dots, X_n\}$  allora  $W$  è a sua volta una variabile aleatoria esponenziale di parametro  $\lambda$  e vale  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .*

**Esercizio 2.** (V. 10 punti.)

Si supponga che il livello di colesterolo in una certa popolazione abbia distribuzione Normale con media  $\mu = 210$  e deviazione standard  $\sigma = 30$  (in mg/dl). Sia  $X$  il livello di colesterolo di una persona scelta a caso.

- (a) Si calcoli la probabilità che  $X$  sia maggiore 300.
- (b) Si determini un intervallo  $A = (\mu - \delta, \mu + \delta)$  tale che  $P(X \in A) = 0.5$
- (c) Su  $n = 100000$  persone qual è il numero medio di persone con una concentrazione di colesterolo superiore a 220?
- (d) Stimare la probabilità che su 100000 persone ve ne siano più di mille con concentrazione di colesterolo maggiore di 280.



**Esercizio 3** (V. 6 punti.) (Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni)

Sia  $T = 3$ , e sia  $X_0, X_1, X_2$  e  $X_3$  il valore di un titolo agli istanti 0, 1, 2 e 3. Supponiamo inoltre che  $X_0 = 1$  e che  $\frac{X_n}{X_{n-1}} \in \{2, \frac{1}{2}\}$  per  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Consideriamo l'opzione  $\pi$  data da:

$$\pi(X_T) = \max(0, 2X_T - 7) \quad (1)$$

(a) Determinare i possibili valori di  $X_1, X_2$  e  $X_3$ . Determinare una strategia di copertura e il prezzo  $V_0$  dell'opzione.



**Esercizio 4.** (V. 6 punti.)

Per quali valori  $c > 0$  esiste una variabile aleatoria  $X$  discreta a valori in  $\mathbb{R}$  tale che:

$$\mathbb{E}[X] = c \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[X^2] < c$$

Per i valori  $c > 0$  per i quali una tale v.a. esiste occorre fornire un esempio mentre per i valori di  $c$  per i quali non esiste occorre fornire una dimostrazione.



**Esercizio 5.** (V. 4+4\* punti.)

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie reali tali che:

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) = 1 \qquad P(Y = y_1) + P(Y = y_2) = 1$$

Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$  la matrice  $2 \times 2$  definita da  $a_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$ .

(a) Dimostrare che se  $x_1 = y_1 = 0$  e  $x_2 = y_2 = 1$  allora vale

$$COV(X, Y) > 0 \iff \det(A) > 0$$

(b) Dimostrare che se  $x_1 < x_2$  e  $y_1 < y_2$  allora vale

$$COV(X, Y) > 0 \iff \det(A) > 0$$