Secondo compitino di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
16/06/2015

COGNOME e NOME ....Cecchetto Federica.......

N. MATRICOLA......1102093.......................................

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione. *Sia* $\{X_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *una famiglia di* n *variabili aleatorie indipendenti, supponiamo che ciascuna variabile aleatoria* X_i *abbia distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda_i > 0$. *Se poniamo* $W := min\{X_1, \dots, X_n\}$ *allora* W *è a sua volta una variabile aleatoria esponenziale di paramentro* λ *e vale* $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda_i t} & t\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} W := \min\{X_1,\dots,X_n\} \\ \lambda_i > 0 \end{array}$$

$$F_W(t) = \mathbb{P}(W\leq t) = \mathbb{P}(\min\{X_1,\dots,X_n\}\leq t) = 1-\mathbb{P}(\min\{X_1,\dots,X_n\}>t) =$$
$$= 1-\mathbb{P}(X_1>t)\cdot\mathbb{P}(X_2>t)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(X_n>t)$$
$$= 1-(1-\mathbb{P}(X_1\leq t))\cdot(1-\mathbb{P}(X_2\leq t))\cdot\ldots\cdot(1-\mathbb{P}(X_n\leq t))$$
$$= 1-(1-F_{X_1}(t))\cdot\ldots\cdot(1-F_{X_n}(t))$$

- se $t<0$ allora $F_{X_i}(t)=0$ quindi $F_W(t)=0$
- se $t\geq 0$ allora $F_{X_i}(t)=1-e^{-\lambda_i t}$ quindi:

$$F_W(t) = 1-(1-F_{X_1}(t))\cdot\ldots\cdot(1-F_{X_n}(t)) =$$
$$= 1-(1-(1-e^{-\lambda_1 t}))\cdot\ldots\cdot(1-(1-e^{-\lambda_n t})) =$$
$$= 1-e^{-\lambda_1 t}\cdot\ldots\cdot e^{-\lambda_n t} = 1-e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}$$

Quindi
$$F_W(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t} & t\geq 0 \end{cases}$$

perciò W è una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ e vale $\lambda = \lambda_1+\dots+\lambda_n > 0$

Esercizio 2. (V. 10 punti.)
Si supponga che il livello di colesterolo in una certa popolazione abbia distribuzione Normale con media $\mu = 210$ e deviazione standard $\sigma = 30$ (in mg/dl). Sia X il livello di colesterolo di una persona scelta a caso.
(a) Si calcoli la probabilità che X sia maggiore 300.
(b) Si determini un intervallo $A = (\mu - \delta, \mu + \delta)$ tale che $P(X \in A) = 0.5$
(c) Su $n = 100000$ persone qual è il numero medio di persone con una concentrazione di colesterolo superiore a 220?
(d) Stimare la probabilità che su 100000 persone ve ne siano più di mille con concentrazione di colesterolo maggiore di 280.

(a) $\mathbb{P}(X>300) = 1-\mathbb{P}(X \leq 300) = 1-\Phi\left(\frac{300-210}{30}\right) = 1-\Phi(3) = 0{,}00135$

(b) $A = (\mu-\delta, \mu+\delta)$ t.c. $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X < \mu+\delta) - \mathbb{P}(X < \mu-\delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$

Deve essere $\mathbb{P}(X\in A) = \frac{1}{2}$, quindi $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 = \frac{1}{2}$

Quindi $\Phi\left(\frac{\delta}{30}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$ quindi $\frac{\delta}{30} \approx 0{,}67$

Perciò $\delta \approx 20{,}1$ e $A = (189{,}9 \,,\, 230{,}1)$

(c) $\mathbb{P}(X>220) = 1-\mathbb{P}(X \leq 220) = 1-\Phi\left(\frac{220-210}{30}\right) = 1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$

Siano $Y_1, \dots, Y_n$ con $n = 100'000$ v.a. indipendenti t.c. $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & \text{con prob. } \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}$ colester >22

Allora $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y_1 + \dots + Y_n] = n \cdot \left(1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 100'000 \cdot \left(1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 37070$

(d) $\mathbb{P}(X>280) = 1-\mathbb{P}(X \leq 280) = 1-\Phi\left(\frac{280-210}{30}\right) = 1-\Phi\left(\frac{7}{3}\right) = 0{,}0099 = p$

$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } p \quad \text{se ha colesterolo} > 280 \\ 0 & \text{con prob. } 1-p \quad \text{se non ha colesterolo} > 280 \end{cases}$

$i \in \{1, \dots, n\}$ $n = 100000$

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z_1 + \dots + Z_n] = 100'000 \cdot p = 990$

$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}[Z_1] + \dots + \mathrm{Var}[Z_n] = 100'000\, p(1-p) = 980{,}199$

$\mathbb{P}(Z>1000) = \mathbb{P}(Z > 1000{,}5) = 1-\mathbb{P}(Z \leq 1000{,}5) =$

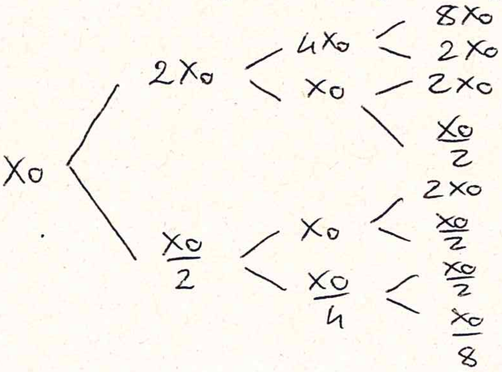
$= 1-\Phi\left(\frac{1000{,}5-990}{\sqrt{980{,}199}}\right) = 1-\Phi(0{,}33) = 0{,}3707$

Esercizio 3 (V. 6 punti.) (Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni)

Sia $T = 3$, e sia X_0, X_1 X_2 e X_3 il valore di un titolo agli istanti 0, 1 2 e 3. Supponiamo inoltre che $X_0 = 1$ e che $\frac{X_n}{X_{n-1}} \in \{2, \frac{1}{2}\}$ per $n \in \{1, 2, 3\}$. Consideriamo l'opzione π data da:

$$\pi(X_T) = \max(0, 2X_T - 7) \tag{1}$$

(a) Detereminare i possibili valori di X_1, X_2 e X_3. Determinare una strategia di copertura e il prezzo V_0 dell'opzione.



$$\begin{cases} \pi(8) = 9 \\ \pi(2) = 0 \\ \pi(\frac{1}{2}) = 0 \\ \pi(\frac{1}{8}) = 0 \end{cases}$$

$X_1 \in \{2, \frac{1}{2}\}$

$X_2 \in \{4, 1, \frac{1}{4}\}$

$X_3 \in \{8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\}$

$V_0 = a_0 X_0 + c_0$

$V_1 = a_0 X_1 + c_0 = a_1 X_1 + c_1$

$V_2 = a_1 X_2 + c_1 = a_2 X_2 + c_2$

$V_3 = a_2 X_3 + c_2$

- Considero $4x_0 \begin{smallmatrix} \nearrow 8x_0 \\ \searrow 2x_0 \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} \pi(8) = 9 = 8a_2 + c_2 \\ \pi(2) = 0 = 2a_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{3}{2} \\ c_2 = -3 \end{cases}$

- Considero $x_0 \begin{smallmatrix} \nearrow 2x_0 \\ \searrow \frac{x_0}{2} \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} \pi(2) = 0 = 2a_2 + c_2 \\ \pi(\frac{1}{2}) = 0 = \frac{a_2}{2} + c_2 \end{cases} \Rightarrow a_2 = c_2 = 0$

- Considero $\frac{x_0}{4} \begin{smallmatrix} \nearrow \frac{x_0}{2} \\ \searrow \frac{x_0}{8} \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} \pi(\frac{1}{2}) = 0 = \frac{a_2}{2} + c_2 \\ \pi(\frac{1}{8}) = 0 = \frac{a_2}{8} + c_2 \end{cases} \Rightarrow a_2 = c_2 = 0$

Ora:

- considero $2x_0 \begin{smallmatrix} \nearrow 4x_0 \\ \searrow x_0 \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 4 - 3 = 4a_1 + c_1 \\ 0 \cdot 1 + 0 = a_1 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$

- considero $\frac{x_0}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow x_0 \\ \searrow \frac{x_0}{4} \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} 0 \cdot 1 + 0 = a_1 + c_1 \\ 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} a_1 + c_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = c_1 = 0$

Infine

- considero $x_0 \begin{smallmatrix} \nearrow 2x_0 \\ \searrow \frac{x_0}{2} \end{smallmatrix}$ Qui vale $\begin{cases} 1 \cdot 2 - 1 = 2a_0 + c_0 \\ 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} a_0 + c_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{3} \\ c_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Quindi $V_0 = a_0 X_0 + c_0 = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Esercizio 4. (V. 6 punti.)
Per quali valori $c > 0$ esiste una variabile aleatoria X discreta a valori in $\mathbb{R}$ tale che:

$$\mathbb{E}[X] = c \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}[X^2] < c$$

Per i valori $c > 0$ per i quali una tale v.a. esiste occorre fornire un esempio mentre per i valori di c per i quali non esiste occorre fornire una dimostrazione.

- Se $c < 1$ allora basta porre $\mathbb{P}(X=c) = 1$.
  Allora $\mathbb{E}[X] = c$ e $\mathbb{E}[X^2] = c^2$ e $c^2 < c$ perché $c \in (0,1)$

- Se $c \geq 1$ tale variabile aleatoria non esiste.
  Infatti $Var(X) \geq 0$ sempre e $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
  quindi $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2 \implies c > \mathbb{E}[X^2] \geq c^2$. Questo e' vero solo per $c \in (0,1)$.
  Perciò se $c \notin (0,1)$ vale $c^2 \geq c$, che e' assurdo, perche' porterebbe a una varianza negativa

Dimostro che $Var[X] \geq 0$:
$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(X=x)$

In questa sommatoria i coefficienti $(x - \mathbb{E}[X])^2$ sono sempre positivi (o 0) perche' quadrati. Anche le probabilità $\mathbb{P}(X=x)$ sono non negative perche' $\in [0,1]$.
Quindi $Var(X) \geq 0$.

Esercizio 5. (V. 4+4* punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie reali tali che:

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) = 1 \qquad\qquad P(Y = y_1) + P(Y = y_2) = 1$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ la matrice 2×2 definita da $a_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

(a) Dimostrare che se $x_1 = y_1 = 0$ e $x_2 = y_2 = 1$ allora vale

$$COV(X,Y) > 0 \iff \det(A) > 0$$

(b) Dimostrare che se $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ allora vale

$$COV(X,Y) > 0 \iff \det(A) > 0$$

(a) Siano: $a = \mathbb{P}(X=x_1, Y=y_1)$ $\quad c = \mathbb{P}(X=x_2, Y=y_1)$
$b = \mathbb{P}(X=x_1, Y=y_2)$ $\quad d = \mathbb{P}(X=x_2, Y=y_2)$
allora $\mathbb{P}(X=x_1) = a+b$ $\quad \mathbb{P}(Y=y_1) = a+c$
$\mathbb{P}(X=x_2) = c+d$ $\quad \mathbb{P}(Y=y_2) = b+d$
Inoltre deve valere $a+b+c+d = 1$
$Cov(X,Y) > 0 \iff \mathbb{E}[XY] > \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$\mathbb{E}[XY] = 0\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c + 1\cdot d = d$
$\mathbb{E}[X] = 0\cdot(a+b) + 1\cdot(c+d) = c+d$
$\mathbb{E}[Y] = 0\cdot(a+c) + 1\cdot(b+d) = b+d$
Quindi $Cov(X,Y) > 0 \iff d > (c+d)(b+d) \iff d > bc + cd + bd + d^2$
cioe' $Cov(X,Y) > 0 \iff d(1-b-c-d) > bc \underset{\text{perché } 1 = a+b+c+d}{\iff} ad > bc \iff a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} > 0 \iff \det(A) > 0$

(b) Uso la stessa notazione del punto (a) per a,b,c,d, con $a+b+c+d=1$.
$x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, allora $x_2 = x_1 + x$ e $y_2 = y_1 + y$ con $x, y > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^+$
Allora $Cov(X,Y) > 0 \iff \mathbb{E}[XY] > \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$\mathbb{E}[XY] = x_1 y_1 a + x_1 y_2 b + x_2 y_1 c + x_2 y_2 d = x_1 y_1 a + x_1 b(y+y_1) + y_1 c(x+x_1) + (x+x_1)(y+y_1)d$
$= x_1 y_1(a+b+c+d) + x_1 y(b+d) + y_1 x(c+d) + xyd$
$= x_1 y_1 + x_1 y(b+d) + y_1 x(c+d) + xyd$ $\quad$ perché $a+b+c+d = 1$
$\mathbb{E}[X] = x_1(a+b) + x_2(c+d) = x_1(a+b) + (x+x_1)(c+d) = x_1 + x(c+d)$
$\mathbb{E}[Y] = y_1(a+c) + y_2(b+d) = y_1(a+c) + (y+y_1)(b+d) = y_1 + y(b+d)$
Quindi $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (x_1 + x(c+d))(y_1 + y(b+d)) = x_1 y_1 + x_1 y(b+d) + x y_1(c+d) + xy(bc + cd + bd + d^2)$

$\mathrm{Cov}(X,Y) > 0 \iff \mathbb{E}[XY] > \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

cioé $\iff \cancel{x_1 y_1} + \cancel{x_1 y (b+d)} + \cancel{y_1 x (c+d)} + xyd > \cancel{x_1 y_1} + \cancel{x_1 y (b+d)} + \cancel{x y_1 (c+d)} + xy(bc + cd + bd \cdot$

$\iff xyd > xy(bc + cd + bd + d^2)$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}^+$, quindi:

$\iff d > bc + cd + bd + d^2 \iff d - cd - bd - d^2 > bc \iff d(1 - c - b - d) > bc \iff ad > bc$

cioé $\iff a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} > 0 \iff \det(A) > 0$