Secondo compitino di
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
16/06/2015

COGNOME e NOME ....TERENZI LUCA....

N. MATRICOLA....1103455....

Esercizio 1. (V. 4 punti.)
Enunciare e dimostrare la proprietà "assenza di memoria" per variabili aleatorie esponenziali.

Sia $X \sim Exp(\lambda)$: si ha che $F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

La proprietà di assenza di memoria è la seguente: dati $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$, risulta:

$\mathbb{P}(X > r+s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > r)$ (per qualsiasi scelta di r, s).

Dimostrazione:

$$\mathbb{P}(X > r+s \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s \mid X > r+s) \cdot \mathbb{P}(X > r+s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{1 \cdot (1 - \mathbb{P}(X \leq r+s))}{1 - \mathbb{P}(X \leq s)} = \frac{e^{-\lambda(r+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda r} = 1 - F_X(r) = 1 - \mathbb{P}(X \leq r) = \mathbb{P}(X$$

Esercizio 2. (V. 6 punti.)
Una macchina per il confezionamento del caffè riempe i sacchetti con una quantità casuale di caffè distribuita normalmente, con media μ e varianza nota $\sigma^2 = (2gr)^2$. Supponiamo di osservare la seguente serie di misurazioni in gr:

247	251	249	249	253
248	252	249	248	251
247	255	250	251	247
254	249	245	249	247
Totale 4991				

(a) Determinare un intervallo di confidenza centrato per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
(b) Determinare un intervallo di confidenza destro per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$.
(d) Determinare un intervallo di confidenza sinistro per μ con livello di confidenza $\gamma = 99\%$.

Il numero di misurazioni effettuate è $n=20$; la media campionaria è $\bar{X} = \frac{4991}{20} = 249{,}55$.

a) $\gamma = 1-\alpha$, da cui $\frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$. Quindi l'intervallo centrato per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$ è il seguente:

$$I_1 = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96\ ,\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96\right) = \left(249{,}55 - \frac{1{,}96}{\sqrt{5}}\ ,\ 249{,}55 + \frac{1{,}96}{\sqrt{5}}\right) \simeq (248{,}67\ ,\ 250{,}43).$$

b) $\gamma = 1-\alpha$, per cui $\alpha = 5\%$. Quindi l'intervallo di confidenza destro per μ con livello di confidenza $\gamma = 95\%$ è:

$$I_2 = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}645, +\infty\right) \simeq (248{,}81, +\infty).$$

d) $\gamma = 1-\alpha$, quindi $\alpha = 1\%$. Quindi l'intervallo di confidenza sinistro per μ con livello di confidenza $\gamma = 99\%$ è

$$I_3 = \left(-\infty, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot 2{,}33\right) \simeq (-\infty, 250{,}59).$$

Esercizio 3. (V. 2+2+4 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim Bin(n = 4, p = \frac{1}{2})$. Definizmo inoltre $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con le seguenti equazioni

$$Y_i := X_i - 2 \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$
$$T_n := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} Y_i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Calcolare media e varianza di Y_i.
(b) Calcolare media e varianza di T_n al variare di $n \in \mathbb{N}$.
(c) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n}{n} \le x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard.

a) Si ha $\mathbb{E}[X_i] = np = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ $\forall i \in \mathbb{N}$; da ciò, sfruttando la linearità della media, si ricava che $\mathbb{E}[Y_i] = 2-2 = 0$ $\forall i$
Inoltre $Var[Y_i] = \mathbb{E}[(Y_i - \mathbb{E}[Y_i])^2] = \mathbb{E}[(X_i - 2 - 0)^2] = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2] = Var[X_i] = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2}) = 1$ (usando la nota formula per la varianza di una v.a. binomiale).

) Poiché $T_n = \sum_{i=1}^{n^2} Y_i = \sum_{i=1}^{n^2} (X_i - 2) = \sum_{i=1}^{n^2} X_i - 2n^2$, dalla linearità della media si ha che $\mathbb{E}[T_n] = n^2(2) - 2n^2 = 0$,
e poiché le X_i ($i = 1, \dots, n$) sono indipendenti si ha anche $Var(T_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n^2} X_i\right) = n^2 \cdot 1 = n^2$ $\left(= \sum_{i=1}^{n^2} Var(X_i)\right)$.

) Definiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$: dunque $T_n = K_{n^2} - 2n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (Si ha $\mathbb{E}[K_n] = 2n$, $Var[K_n] = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.)
K_n è la somma delle prime n v.a. della successione $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Le X_i, al variare di $i \in \mathbb{N}$, sono indipendenti e identicamente distribuite, e hanno media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 1$: pertanto soddisfano le ipotesi del teorema del limite centrale, e possiamo scrivere:

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{K_n - 2n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Abbiamo detto che, $\forall x \in \mathbb{R}$, la successione $p_n(x) := \mathbb{P}\left(\frac{K_n - 2n}{\sqrt{n}} \le x\right)$ converge a $\Phi(x)$. Ma allora devono convergere allo stesso valore tutte le sue sottosuccessioni: considerando, in particolare, la sottosuccessione $q_i(x) := p_{i^2}(x)$, troviamo che:

$$\lim_{i\to+\infty} q_i(x) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{K_{i^2}-2i^2}{i} \leqslant x\right) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_i}{i} \leqslant x\right) = \Phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. (V. 4 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie reali discrete tali che

$$\mathbb{E}[X] = 1$$
$$\mathbb{E}[Y] = 2$$
$$\mathbb{E}[X^2] = 3$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = 4$$

dimostrare che $\mathbb{E}[XY] = 2$.

Innanzitutto notiamo che $Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$.
Ciò implica che $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{P}(Y=c) = 1$, e tale c non può che essere pari a $\mathbb{E}[Y] = 2$.
Poiché Y è quasi certamente uguale a 2, X e Y sono indipendenti: infatti si ha, scelti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{P}(X=\alpha, Y=\beta) = 0$ se $\beta \neq 2$, mentre $\mathbb{P}(X=\alpha, Y=\beta) = \mathbb{P}(X=\alpha)$ se $\beta = 2$.

Poiché X e Y sono indipendenti vale $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot 2 = 2$.

Esercizio 5. (V. 8+4* punti.)
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$, Y abbia distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \ln(2)$ e infine Z abbiamo distribuzione uniforme sull'intervallo $(-1, 1)$. Siano $T := X \cdot Z$ e $W := \min\{Y, Z\}$.
(a) Determinare media e varianza di T.
(b) Calcolare $P(T < Z)$.
(c) Calcolare $P(W = 0)$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_W di W. E fare un grafico di $y = F_W(x)$.
(e)* Data U variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1)$ determinare una funzione $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ non decrescente tale che si abbia $g(U) \sim W$.
(f)* Utilizzando il risultato del quesito (e) calcolare $\mathbb{E}[W]$.

a) Poiché X e Z sono indipendenti, $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Z] = \frac{1}{p} \cdot 0 = 0$.
Inoltre anche X^2 e Z^2 sono indipendenti, quindi $\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Z^2]$.
Ora, $\mathbb{E}[X^2] = Var(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$; $\mathbb{E}[Z^2] := \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{6} x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$.
Quindi $\mathbb{E}[T^2] = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, e $Var(T) = \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]^2 = 2$.

) $\mathbb{P}(T < Z) = \mathbb{P}(X \cdot Z < Z) = \mathbb{P}(Z > 0) \cdot \mathbb{P}(X < 1) + \mathbb{P}(Z < 0) \cdot \mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

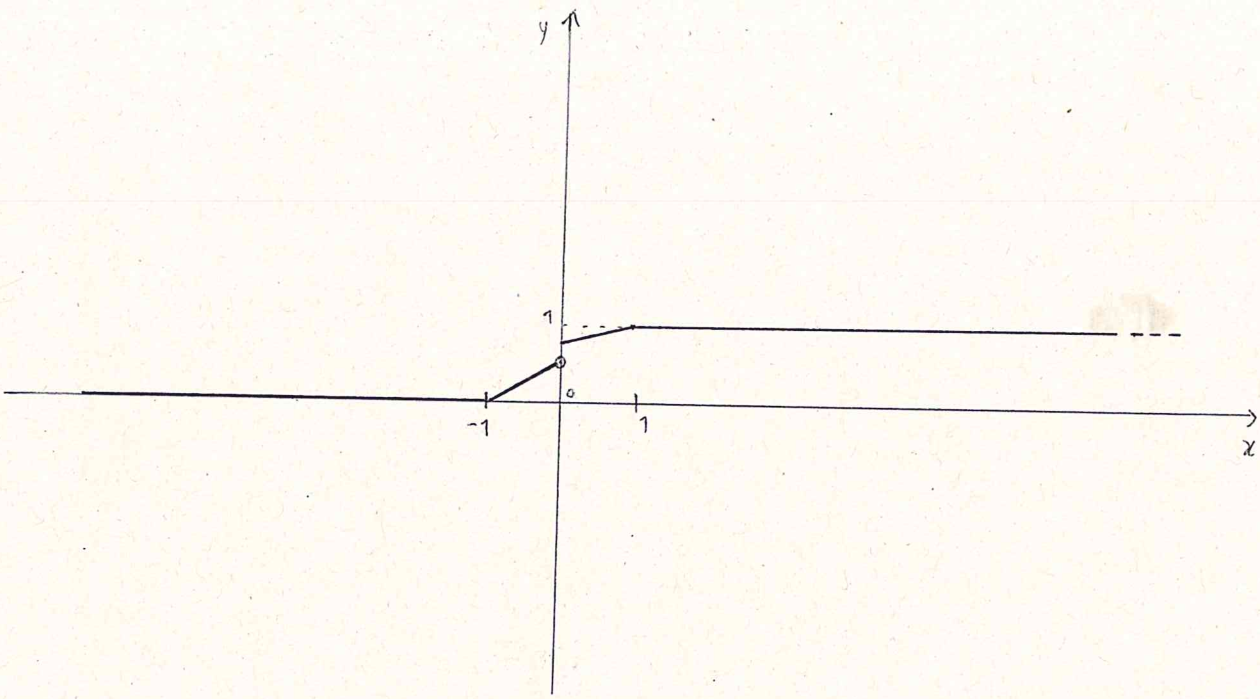
) $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) \cdot \mathbb{P}(Z \geq 0) + \mathbb{P}(Y > 0) \cdot \mathbb{P}(Z = 0)$. Poiché Z è assolutamente continua, l'ultimo addendo è nullo; il primo è pari a $e^{-\ln 2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

) Poiché $Y \geq 0$, $Z \in [-1, 1]$, si ha $F_W(x) = \mathbb{P}(\min\{Y, Z\} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Analizziamo cosa avviene per $x \in [-1, 1)$:

se $x \in [-1, 0)$, allora, essendo $Y \geq 0$, si ha $F_W(x) = F_Z(x) = \frac{x+1}{2}$;

se invece $x \in [0, 1)$, essendo $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$, risulta $F_W(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Z > x) = \frac{t+1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{2}\right) = \frac{t+3}{4}$.

Quindi il grafico di $y = F_W(x)$ è il seguente:

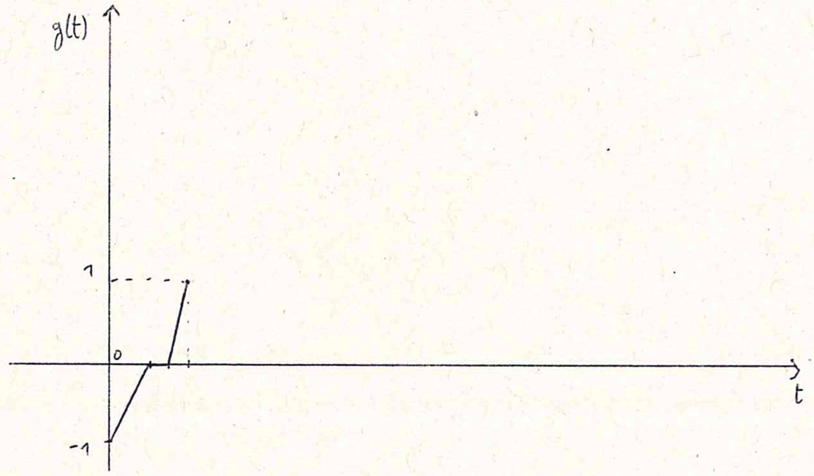


(La discontinuità in 0 è dovuta al fatto che $\lim_{x \to 0^-} F_W(x) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} = \lim_{x \to 0^+} F_W(x) = F_W(0)$).

) La funzione richiesta si può immediatamente ricavare analizzando il grafico di F_W.

Definiamo infatti:

$$g(t) = \begin{cases} 2t - 1 & \text{se } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{se } t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 4u - 3 & \text{se } t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}.$$



) è continua, non decrescente e si ha:

$$F_{g(U)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \frac{x+3}{4} & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dal fatto che $F_{g(U)}(x) = F_W(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ segue che $g(U) \sim W$.

Il calcolo di $F_{g(U)}(x)$ può essere effettuato verificando l'uguaglianza nei punti dove g non è derivabile e osservando che g è lineare a tratti).

f) Dopo aver determinato g possiamo scrivere:

$$\mathbb{E}[W] = \int_0^1 g(t)\,dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}.$$