Prova d'esame parziale 2015
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
Esempio 1

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 1 punti.)
(a) Fornire la definizione di varianza di una variabile aleatoria discreta

Esercizio 2. (V. 3 punti.)
Per quali valori $s \in \mathbb{R}$ esiste una variabile aleatoria X discreta tale che:

- $P(X \in \{0, 1, 10\}) = 1$
- $\mathbb{E}[X] = 1$
- $Var[X] = s$

(`Sugg. Per i valori` c `per i quali la v.a. esiste è necessario fornire un esempio!`)

Esercizio 3.(V. 10 punti.)
(`Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni`)
Supponiamo di avere tre urne che chiameremo urna A, urna B e urna C. Nell'urna A ci sono i numeri da 1 a 10, nell'urna B ci sono i numeri da 1 a 20 mentre nell'urna C ci sono i numeri da 1 a 30. Disponiamo le urne in ordine casuale. Poi estraiamo un numero a caso da ciascuna urna, indichiamo con X il numero estratto dalla prima urna, Y il numero estratto dalla seconda urna e Z il numero estratto dalla terza urna.
Indichiamo infine con A l'evento la prima urna è l'urna A (X è stato estratto dall'urna A) e con B l'evento la prima urna è l'urna B
(a) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 20 se sappiamo che è stato estratto dall'urna A?
(b) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 20 se sappiamo che è stato estratto dall'urna B?
(c) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 20?
(d) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia minore o uguale a 12?
(e) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia maggiore di 24?
(f) Calcolare $P(Y = 12|X = 24)$.
(g) Calcolare $P(A|X = 6)$.
(h) Calcolare $P(Y = 24|X = 12)$.
(i) Calcolare $P(X = Y = Z)$.
(l) Calcolare $P(X = Y)$.

Esercizio 4. (V. 3 punti.) (`Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni`)
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, sia $p \in [0, 1]$, $p \neq \frac{1}{2}$. Supponiamo che $P(X = 1) = p$, $P(X = -1) = 1 - p$ e $P(Y = p) = P(Y = 1 - p) = \frac{1}{2}$.
(a) Calcolare la media e la varianza di X.
(b) Calcolare la media e la varianza di Y.
(c) Quanto vale $P(X = Y)$?

Esercizio 5. (V. 3 punti.)
Il Papà di Gianni ha promesso a Gianni che gli comprerà la moto se a Giugno riuscirà a superare tutti gli esami. Gianni deve superare 4 esami e ha a disposizione 12 settimane complessive di studio per prepararsi. Sa che se studia un esame 6 settimane allora sicuramente supererà l'esame, se studia 4 settimane ha una probabilità del 70% se studia 2 settimane ha una probabilità del 40% e infine se non studia ha comunque una probabilità del 30% di superare l'esame tentando di copiare. Assumiamo che tutte queste probabilità siano indipendenti.
(a) Se Gianni decide di non studiare e tentare di superare tutti gli esami compiando, qual è la probabilità che riuscirà ad avere la moto?
(b) Se Gianni decide di dedicare ai primi 2 esami 4 settimana e ai rimanti 2 settimane, qual è la probabilità che riuscirà ad avere la moto?
(c) Qual è tra tutte le strategie possibili quella che massimizza la probabilità di avere la moto?

Soluzioni

Esercizio 2
Vista la prima proprietà allora è naturale porre
$a := P(X = 0)$, $b := P(X = 1)$, $c := P(X = 10)$
Dalle prime due prorieà ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 10 \cdot c = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 9c \\ b = 1 - 10c \end{cases} \tag{1}$$

se imponiamo $a, b, c \in [0, 1]$ otteniamo:

$$\begin{cases} 0 \leq 9c \leq 1 \\ 0 \leq 1 - 10c \leq 1 \\ 0 \leq c \leq 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq c \leq \frac{1}{10}$$

dunque esiste una variabile aleatoria X che soddisfa le prime due condizioni se e solo se $P(X = 10) \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$. Dalle terza condizione utilizzando l'equazione (1) otteniamo:

$$(0-1)^2 \cdot a + (1-1)^2 \cdot b + (10-1)^2 \cdot c = s \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{1}{90}s$$

quindi

$$0 \leq c \leq \frac{1}{10} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq s \leq 9$$

Possiamo concludere che esiste una varibile aleatoria X che soddisfa le ipotesi se e solo se $0 \leq s \leq 9$ ed in questa caso deve valere

$$P(X = 0) = \frac{1}{10}s, \qquad P(X = 1) = \frac{8}{9}s, \qquad P(X = 10) = \frac{1}{90}s\ .$$

Esercizio 3
(a) 0; (b) $\frac{1}{20}$, (c) $\frac{1}{36}$, (d) $\frac{2}{3}$, (e) $\frac{1}{15}$, (f) $\frac{1}{40}$, (g) $\frac{6}{11}$, (h) $\frac{1}{100}$, (i) $\frac{1}{600}$, (l) $\frac{7}{180}$,

Esercizio 4
(a) $2p-1$, $4p(1-p)$; (b) $\frac{1}{2}$, $p^2-p+\frac{1}{2}$, (c) $P(X=Y)=\begin{cases} \frac{1}{2} & p=1 \\ 0 & p\neq 1 \end{cases}$,

Esercizio 5
(a) $\frac{81}{10000}=0.81\%$; (b) $\frac{784}{10000}=7.84\%$; (c) $(4,4,4,0)$, $\frac{1029}{10000}=10.29\%$;