

Prova d'esame parziale 2015
Probabilità e Statistica
Laurea Triennale in Matematica
Esempio 2

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 1 punti.)

Fornire la definizione di indipendenza per una famiglia finita di variabili aleatorie discrete.

Esercizio 2. (V. 4 punti.)

Per quali valori $c \in \mathbb{R}$ esiste una variabile aleatoria X discreta tale che: $P(X \in [0, 10]) = 1$, $\mathbb{E}[X] = 5$ e $Var(X) = c$? (Sugg. Per i valori c per i quali la v.a. esiste occorre fornire un esempio mentre per i valori c per i quali non esiste occorre fornire una dimostrazione)

Esercizio 3. (V. 5 punti.) (Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni)

In un'urna ci sono 8 biglie, 5 rosse e 3 gialle. Estraiamo 3 biglie, sia X il numero di biglie rosse estratte e sia Y il numero di biglie gialle.

- (a) Calcolare la distribuzione di X .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (c) Calcolare la varianza di X .
- (d) Quanto vale $P(X = Y)$? Quanto vale $P(Y = 1)$?
- (e) Le variabili X e Y sono indipendenti? (Giustificare la risposta)

Esercizio 4. (V. 5 punti.) (Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia distribuzione binomiale di parametri $n = 3$ e $p_1 = \frac{1}{2}$ mentre Y abbia distribuzione di bernoulli di parametro $p_2 = \frac{2}{3}$. Sia infine $Z := \max(X, Y)$.

- (a) Calcolare $P(Z = 2)$ e $P(Z = 3)$.
- (b) Calcolare $P(Z = 0)$ e $P(Z = 1)$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.
- (d) Calcolare la varianza di Z .
- (e) Quanto vale $P(Z > Y)$?

Esercizio 5. (V. 6 punti.)

Al poligono di tiro sono presenti 5 tiratori, 2 tiratori professionisti e 3 amatoriali. Un tiratore professionista ha una probabilità del 5% di mancare il bersaglio mentre questa stessa probabilità sale al 10% per i tiratori amatoriali, supponiamo che ciascun tiratore effettui 10 tiri e che gli esiti dei tiri siano indipendenti.

- (a) Sia X il numero di centri effettuati da un tiratore amatoriale, indicare la media, la varianza e la distribuzione di X .
- (b) Qual è la media e la varianza del numero di centri effettuati in totale dai 5 tiratori?
- (c) Se è stato effettuato un solo errore qual è la probabilità che sia stato un tiratore amatoriale a sbagliare?

Soluzioni

Esercizio 2

Prima di tutto se $c < 0$ allora non esiste perché la varianza non può essere negativa.

Mentre se $c = 0$ allora basta prendere X tale che $P(X = 5) = 1$.

Restano i casi con $c > 0$. Dalla definizione di varianza abbiamo

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X - 5)^2] = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - 5)^2 \cdot P(X = x)$$

poiché sappiamo che $P(X \in [0, 10]) = 1$ allora $P(X = x) = 0$ per ogni $x \notin [0, 10]$ quindi l'equazione precedente diventa:

$$Var[X] = \sum_{0 \leq x \leq 10} (x - 5)^2 \cdot P(X = x)$$

poiché per $0 \leq x \leq 10$ vale $(x - 5)^2 \leq 25$ allora possiamo maggiorare nell'equazione precedente ed ottenere:

$$Var[X] \leq \sum_{0 \leq x \leq 10} 25 \cdot P(X = x) = 25 \sum_{0 \leq x \leq 10} P(X = x) = 25$$

Dunque se $c > 25$ non esiste alcuna v.a. X che soddisfa le ipotesi del sistema. Restano ora i soli casi $c \in (0, 25]$.

Ci sono tanti modi di costruire una possibile v.a. che soddisfa le ipotesi del teorema quando $c \in (0, 25]$.

METODO 1. Al variare di $\delta \in (0, 5]$ sia X_δ una v.a. con densità

$$P(X_\delta = 5 - \delta) = P(X_\delta = 5 + \delta) = \frac{1}{2}$$

chiaramente vale $\mathbb{E}[X] = 5$ e $P(X \in [0, 10]) = 1$. Per quanto riguarda la varianza si ha:

$$Var[X_\delta] = \mathbb{E}[(X - 5)^2] = \delta^2$$

METODO 2. Si suppone $P(X \in \{0, 5, 10\}) = 1$ e si procede come con l'esercizio due dell'altra traccia esempio.

CONCLUSIONE:

- | | |
|-----------------------|--|
| se $c = 0$ | allora X con densità $P(X = 5) = 1$ soddisfa le ipotesi |
| se $0 < c \leq 25$ | allora X con densità $P(X = 5 - \sqrt{c}) = P(X = 5 + \sqrt{c}) = \frac{1}{2}$ soddisfa le ipotesi |
| se $c \notin [0, 25]$ | allora nessuna v.a. X può soddisfare le ipotesi |

Esercizio 3

- (a) $P(X = 0) = \frac{1}{56}$, $P(X = 1) = \frac{15}{56}$, $P(X = 2) = \frac{30}{56}$, $P(X = 3) = \frac{10}{56}$;
(b) $\frac{15}{8}$;
(c) $\frac{225}{448}$
(d) $P(X = Y) = 0$, $P(Y = 1) = \frac{15}{28}$
(e) No...

Esercizio 4

- (a) $P(Z = 2) = \frac{9}{24}$, $P(Z = 3) = \frac{3}{24}$;
(b) $P(Z = 0) = \frac{1}{24}$, $P(Z = 1) = \frac{11}{24}$;
(c) $\frac{19}{12}$;
(d) $\frac{83}{144}$;
(e) $\frac{5}{8}$;

Esercizio 5

- (a) $X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0.9)$, $\mathbb{E}[X] = 9$, $\text{Var}[X] = 0.9$
(b) $46, \frac{73}{20}$
(c*) $\frac{19}{25}$