

Esercitazione del 10/03/2015

Probabilità e Statistica

David Barbato

Esercizio 1

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte.

(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Esercizio 2 Se estraiamo 3 palline a caso da un'urna che contiene 4 palline bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e due siano nere?

Esercizio 3

Una commissione di 4 persone viene estratta da un gruppo di 6 uomini e 8 donne. Se la selezione avviene in modo casuale, qual è la probabilità che la commissione sia costituita da 2 uomini e 2 donne?

Esercizio 4 (Problema dei compleanni)

Se in una stanza ci sono n persone, qual è la probabilità che nessuno tra loro festeggi il compleanno lo stesso giorno dell'anno? Quanto grande deve essere n affinché questa probabilità sia minore di $\frac{1}{2}$? (Assumere che nessuno sia nato il 29 febbraio e che tutti i restanti giorni siano equiprobabili.)

Esercizio 5

In un torneo di tennis ci sono 8 concorrenti, 4 sono italiani, 3 francesi ed uno spagnolo. Se supponiamo che tutti gli esiti sono equiprobabili, qual è la probabilità che vinca il torneo un italiano e arrivi secondo il concorrente spagnolo.

Esercizio 6

Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.

(a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?

(b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?

(c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?

(d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dadi sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4. (Il quesito (d) è accessibile dalla terza settimana di lezione.)

Esercizio 7

Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?
- (b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?
- (c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.
- (d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.
- (e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.
- (f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2. (Accessibile dalla terza settimana di lezione.)
- (g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2. (Accessibile dalla terza settimana di lezione.)

Esercizio 8

Se lanciamo n volte una moneta le possibili sequenze (di “testa” o “croce”) saranno 2^n . Quante sono le sequenze in cui croce esce esattamente k volte? Supponiamo che la moneta sia regolare qual è la probabilità che croce esca esattamente k volte?

Esercizio 9

Supponiamo di avere n biglie e N scatole. Disponiamo le biglie a caso nelle scatole. Cioè ciascuna biglia viene messa a caso in una delle N scatole cosicché ciascuna delle N^n disposizioni abbia la stessa probabilità. Quante sono le disposizioni in cui nella prima scatola ci sono esattamente k biglie? Qual è la probabilità che nella prima scatola ci siano esattamente k biglie?

Soluzioni

Esercizio 1 $1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

Esercizio 2 $\frac{10}{21}$

Esercizio 3 $\frac{60}{143}$

Esercizio 4 $\frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \cdot 23.$

Esercizio 5 $\frac{1}{14}.$

Esercizio 6

Svolgimento:

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi dadi regolari ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.

Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{somma dei dadi uguale a } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(b)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{somma dei dadi maggiore di } 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Somma maggiore di 9} | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Esercizio 7 (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{9}$, (d) $\frac{13}{18}$, (e) $\frac{25}{36}$, (f) $\frac{1}{3}$, (g) $\frac{3}{7}$,

Esercizio 8 $\binom{n}{k}$, $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$

Esercizio 9 $\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}$, $\binom{n}{k} (N-1)^{n-k} \frac{1}{N^n} = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{N}\right)^k$