

Esercitazione del 17/03/2015

Probabilità e Statistica

esercizi extra

David Barbato

Esercizio 1

Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.

- (a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
- (b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?
- (c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniera casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Esercizio 2

Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte (esattamente 3 volte)?
- (b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte?
- (c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
- (d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
- (e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
- (f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
- (g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
- (h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
- (i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
- (l) Qual è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Esercizio 3

Consideriamo l'insieme $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Siano A e B due sottoinsieme di S scelti a caso tra i 2^n possibili.

- (a) Calcolare $P(A \subseteq B)$.
- (b) Calcolare $P(A \cap B = \emptyset)$.

Esercizio 4

In una classe ci sono 6 matricole maschi, 10 matricole femmine e 21 maschi del secondo anno. Quante femmine del secondo anno devono essere presenti affinché sesso e anno di iscrizione siano indipendenti quando uno studente è scelto a caso?

Esercizio 5

Ci sono due dadi A e B. Il dado A ha 2 facce rosse e 4 verdi mentre il dado B ha 2 facce verdi e 4 rosse. Lanciamo una moneta regolare per decidere quale dei due dadi utilizzare e poi effettuiamo $n > 1$ lanci con il dado scelto.

- (a) Qual è la probabilità che il primo lancio dia rosso?
- (b) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano rosso?
- (c) Se sappiamo che il primo lancio ha dato rosso, qual è la probabilità che sia stato utilizzato il dado A?
- (d) Se sappiamo che tutti e n i lanci hanno dato rosso, qual è la probabilità che sia stato utilizzato il dado A?
- (e) Se il primo lancio ha dato rosso, qual è la probabilità che anche il secondo dia rosso?

Esercizio 6

Sappiamo che la probabilità che una donna portatrice del gene dell'emofilia trasmetta il gene ad un figlio o ad una figlia è del 50%. Le donne portatrici del gene dell'emofilia sono indistinguibili dalle altre donne, mentre gli uomini portatori del gene manifestano la malattia. Supponiamo che la regina abbia un fratello malato di emofilia.

- (a) Qual è la probabilità che la regina sia portatrice sana della malattia?
- (b) Se la regina ha un figlio maschio, qual è la probabilità che sia malato di emofilia?
- (c) Se la regina ha un figlio sano qual è la probabilità che la regina sia portatrice sana della malattia?
- (d) Se la regina ha già un figlio sano e nasce un secondo figlio qual è la probabilità che sia sano?

Esercizio 7**

Un'urna contiene $n \geq 2$ palline che possono essere rosse o verdi. Riteniamo che il numero di palline rosse possa assumere tutti i valori $\{0, 1, \dots, n\}$ con uguale probabilità. Estraiamo a caso due palline, qual è la probabilità che siano una rossa e una verde?

Soluzioni:

Esercizio 1

(a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità $1/60$.

Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \dots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \dots + \frac{1}{3600}$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è $1/60$.

(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" = $60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51$

"Casi possibili" = 60^{10}

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:

$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"

$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"

$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \quad P(A_2) = \frac{1}{4} \quad P(E|A_1) = 0.7 \quad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 2

(a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{1}{8}$, (f) $\frac{1}{48}$, (g) $\frac{3}{8}$, (h) $\frac{63}{384}$, (i) $\frac{3}{8}$, (l) $\frac{77}{192}$,