Esercitazione del 13/04/2015
Probabilità e Statistica

David Barbato

`I quesiti contrassegnati con il simbolo ♯ saranno accessibili nella seconda metà del corso.`

Esercizio 1. *Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrate (1900 cc ,2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:*
(a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?
(b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?
(c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?
Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).
(d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico? [`Accessibile dalla settima settimana`]
(e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?

Esercizio 2. *Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il* 60% *di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il* 20% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 20% *di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il* 10% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 30% *di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con X_1, X_2 e X (risp. Y_1, Y_2, Y) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).*
(a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?
(b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?
(c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?
(d) Quale è la distribuzione di X? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)
(e) Quale è la distribuzione di Y?

Esercizio 3. *Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con* X_1 *e* X_2 *il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.*
(a) Quali sono le distribuzioni di X_1 *e* X_2*?*
(b) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?
(c) Sia* n *un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui* n *lanci (invece di 2) e Fortunata effettui* $n + 1$ *lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di* n *la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di* n *le due probabilità sono uguali?*

Esercizio 4. *Ad un mazzo da poker di 52 carte, aggiungiamo due jolly. Disponiamo le* 54 *carte a caso, poi partendo dalla prima riveliamo carte finché non riveliamo un jolly. Sia* N *la variabile aleatoria che indica il numero di carte rivelate, (chiaramente si avrà* $1 \leq N \leq 53$*). Sia* X *la* $(N + 1)$_*esima carta (*X *è la prima carta dopo il primo jolly).*
(a) Qual è la probabilità che le prime due carte siano jolly? (Calcolare $P(N = 1, X = jolly)$*)*
(b) Qual è la distribuzione di N*. (Calcolare* $P(N = n)$*).*
*(c)** Qual è la probabilità che* X *sia il due di picche?*

Esercizio 5. *Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell'* 70% *che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un* 60% *di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al* 10% *in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un* 30% *di piante che seccheranno nel caso che non piova e un* 20% *in caso di pioggia.*
(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Esercizio 6. *Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).*
I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$
I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$
Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.

(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?
(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?
(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.
(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?
(e) $\sharp$ *Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di* 10 *malfunzionanti?* `(accessibile alla fine del corso.)`

Esercizio 7. *Un'azienda produce componenti per autovetture. Da una statistica risulta che lo* 0.2% *dei componenti presenta un difetto di livello 1 e lo* 0.1% *presenta un difetto di livello 2, mentre il restante* 99.7% *non presenta difetti. Sappiamo inoltre che durante la fase di rodaggio un componente con un difetto di livello 1 ha una probabilità di rompersi del* 65% *mentre questa stessa probabilità sale al* 90% *per i difetti di livello 2.*
(a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso si rompa durante la fase di rodaggio?
(b) Se un componente si rompe durante la fase di rodaggio, qual è la probabilità che abbia un difetto di livello 1?
(c) L'azienda nel mese di Dicembre ha prodotto 60000 *componenti. Qual è la media e la varianza del numero di questi componenti che si romperà durante la fase di rodaggio?*
(d) $\sharp$ *Stimare la probabilità che durante il rodaggio (dei* 60000 *componenti) ci siano più di 150 rotture.*`(accessibile alla fine del corso.)`

Esercizio 8. *In un sacchetto ci sono 4 monete: 3 monete regolari ed una con due teste.*

(a) Estraggo una moneta a caso, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?
(b) Estraggo due monete senza reinserimento, qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?
(c) Estraggo due monete con reinserimento, (`Eseguo la prima estrazione, reinserisco la moneta nell'urna e poi eseguo la seconda estrazione.`*) Qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?*
(d) Estraggo una moneta a caso e la lancio, qual è la probabilità che dia testa?
(e) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è testa, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?
(f) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è croce,

qual è la probabilità che sia una moneta regolare?
(g) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è il numero medio di teste ottenute?
(h) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è la varianza del numero di teste ottenute?
(i) Ripeto 100 volte la seguente procedura: estrazione di una moneta, lancio e reinserimento della moneta nel sacchetto. Qual è il numero medio e la varianza di teste ottenute nei 100 lanci.
(l) ♯ Nelle ipotesi del quesito (i) qual è la probabilità che si realizzino più di 60 teste?`(accessibile alla fine del corso.)`

Soluzioni

Esercizio 1 (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.
(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con X_1 e X_2 le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento $B := A^c =$ "tutti e 6 i clienti hanno scelto autovetture diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40$
"Casi possibili"$= 45^6$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6}$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con $(Y_i)_{i \in \{1,2,\ldots,100\}}$ le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:
A_1 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"
A_2 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"
E := "È stato scelto il climatizzatore automatico".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A_2) = \frac{2}{3} \qquad P(E|A_1) = 0.60 \qquad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Esercizio 2

(a) 16%

(b) 8%

(c) 20%

(d) $P(X = 200) = 4\%$, $P(X = 150) = 8\%$, $P(X = 125) = 8\%$, $P(X = 100) = 20\%$, $P(X = 75) = 8\%$, $P(X = 50) = 20\%$, $P(X = 25) = 16\%$, $P(X = 0) = 16\%$,

(e) $P(X = 200) = 1\%$, $P(X = 150) = 4\%$, $P(X = 125) = 6\%$, $P(X = 100) = 12\%$, $P(X = 75) = 12\%$, $P(X = 50) = 25\%$, $P(X = 25) = 24\%$, $P(X = 0) = 16\%$,

Esercizio 3

(a) $X_1 \sim Bin(2, \frac{1}{2})$, $X_2 \sim Bin(3, \frac{1}{2})$,

(b) $P(X_1 \geq X_2) = \frac{1}{2}$

Esercizio 4
(a) $\frac{1}{1431}$,
(b) $P(N = n) = \frac{54-n}{1431}$

Esercizio 5 (a) 75%, (b) Se decide di non concimare la percentuale media di piantine che sopravviveranno è del 77% dunque se vuole massimizzare la percentuale media di piantine che sopravviveranno gli conviene non concimare.

Esercizio 6 (a) $\frac{1}{5000}$, (b) 96.2%, (c) $\frac{96\cdot995}{100\cdot962} \simeq 0.99293$ (d) $\simeq 7.07$
(e) $\simeq 1 - \Phi(1.29) \simeq 9.85\%$

Esercizio 7
(a) 0.22%
(b) $\frac{13}{22}$
(c) 132, 131.7
(d) $1 - \phi(1.61) = 0.0537$