

Esercitazione del 18/05/2015

Probabilità e Statistica

Foglio 11

David Barbato

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = 2\omega^2$. Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = e^\omega$. Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

Esercizio 3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = \log(\omega)$. Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia h una funzione da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ crescente e sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = h(\omega)$. Sapendo che:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}$$

Calcolare la funzione h .

Esercizio 5. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia h una funzione da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ crescente e sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = h(\omega)$. Sapendo che:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & b \leq t \end{cases}$$

con $a < b$. Calcolare la funzione h .

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità con $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A}$ sigma-algebra dei boreliani di $(0, 1)$ e P misura di Lebesgue. Sia h una funzione da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ crescente e sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variabile aleatoria definita da $X(\omega) = h(\omega)$. Sapendo che:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t \end{cases}$$

Calcolare la funzione h .

Soluzioni

Esercizio 1 $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sqrt{\frac{t}{2}} & 0 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}$

Esercizio 2 $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \log(t) & 1 \leq t < e \\ 1 & e \leq t \end{cases}$

Esercizio 3 $F_X(t) = \begin{cases} e^t & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$

Esercizio 4 Sia $\bar{\omega} \in (0, 1)$, se $h(\bar{\omega}) = y$ allora poiché sappiamo che h è crescente allora vale

$$P(\{\omega \in (0, 1) | h(\omega) \leq y\}) = \bar{\omega}$$

dunque

$$\bar{\omega} = P(X \leq y) = F_X(y) = \frac{y}{2}$$

quindi $y = 2\bar{\omega}$ e poiché $h(\bar{\omega}) = y$ allora vale

$$h(\bar{\omega}) = 2\bar{\omega}$$

Esercizio 5 $h(\omega) = a + \omega(b - a)$

Esercizio 6 $h(\omega) = -\log(1 - \omega)$