Esercitazione del 25/05/2015
Probabilità e Statistica
Foglio 12

David Barbato

Elementi di teoria.

Valore atteso della somma di variabili aletorie. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie che ammettono media finita (oppure variabili aleatorie positive) allora vale:

$$\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n] = \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \lambda_n \mathbb{E}[X_n]$$

Valore atteso del prodotto di variabili aleatorie indipendenti. Se $\{X_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ sono variabili aleaotrie indipendenti e $g_1, \ldots, g_n$ sono funzioni positive (oppure tali che $Y_i := g_i(X_i)$ ammette media finita per ogni i) allora vale

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) \cdot \ldots \cdot g_n(X_n)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[g_n(X_n)]$$

Esercizio 1. *Sia $X \sim Exp(\lambda)$. Calcolare media e varianza di X.*

Esercizio 2. *Sia $X \sim Unif(a, b)$. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di X.*

Esercizio 3. *Sia $X \sim Exp(\lambda)$. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di X.*

Esercizio 4. *Sia $X \sim Exp(\lambda)$. Sia $Y := cX$ con $c > 0$. A quale famiglia di distribuzioni appartiene la distribuzione di Y, calcolarne gli eventuali parametri.*

Esercizio 5. *Sia $X \sim Unif(a, b)$. Sia $Y := cX + d$ con $c \neq 0$. A quale famiglia di distribuzioni appartiene la distribuzione di Y, calcolarne gli eventuali parametri. (`Distinguere i due casi` $c > 0$ `e` $c < 0$)*

Esercizio 6. *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e che Y abbia invece una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Sia infine $Z = X + Y$ e $T = X \cdot Y$.*
(a) Calcolare il valore atteso di Z e di T.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di T.
(d) Calcolare $P(Z > 2T)$.

Esercizio 7. *Sia* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $p = \frac{1}{2}$ *e* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleotorie indipendenti. Sia* X_1 *v.a. con distribuzione binomiale di parametri* $(3, p)$. *Sia* X_2 *v.a. con* $P(X_2 = x_1) = p$ *e* $P(X_2 = x_2) = 1 - p$. *Sia* X_3 *v.a. con distribuzione esponenziale di parametro* λ. *Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ *e* $Z = X_2 + X_3$.
(a) Calcolare media e varianza di T.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}]$.
(c) Calcolare $P(Z \leq 1)$, $P(Z \leq 3)$ *e* $P(Z \leq 5)$.
(d) Calcolare F_Z.

Esercizio 8. *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X_1 *abbia una distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{4}$ *che* X_2 *abbia una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda_1 = 2$ *e che* X_3 *abbia una distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_2 = 3$. *Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, $Z = X_1 + X_2 + X_3$ *e* $W = \min\{X_1, X_2\}$.
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T.
(b) Calcolare $P(Z < \frac{1}{2})$.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di W.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

Esercizio 9. *Siano* X, Y *e* Z *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo* X *esponenziale di parametro* $\lambda = 2$, Y *uniforme sull'intervallo* $(0, 10)$, Z *discreta con* $P(Z = -1) = \frac{1}{4}$, $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$ *e* $P(Z = +1) = \frac{1}{4}$.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y + Z]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$.
(d) Calcolare $VAR[Z]$.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Z)^2]$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[e^Z]$.
(g) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X+Z}]$.
(h) Calcolare $P(Y < Z)$.
(i) Calcolare $\mathbb{E}[\cos(\pi Z)]$.
(l) Calcolare $P(YZ > 2)$.

Esercizio 10. *Sia* X *una v.a. uniforme sull'intervallo* $(0, 2)$ *e sia* $Y := X^2$. *Qual è la distribuzione di* Y*?*
(a) Qual é il supporto di Y*?*
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(c) Calcolare la densità f_Y.

Esercizio 11. *Siano* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a. indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo* $(0, 1)$. *Sia* $W := min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$,

$T := max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $Y := 1 - T$. Qual è il valore medio di W? E quello di T?
(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_W.
(b) Calcolare la densità f_W.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_T.
(d) Calcolare la densità f_T.
(e) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[T]$.
(f) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(g) Quanto vale $\mathbb{E}[W]$?

Soluzioni

Esercizio 1

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integrando per parti

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 f_X(x) dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integrando due volte per parti

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esercizio 2

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \forall t < \lambda$$

Esercizio 4 Per la v.a. X si ha $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$
Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y.

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(cX \leq t) = P\left(X \leq \frac{t}{c}\right) = F_X\left(\frac{t}{c}\right)$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \frac{t}{c}} & t \geq 0 \end{cases}$$

dunque Y è una variabile aleatoria esponenziale di paramentro $\frac{\lambda}{t}$

Esercizio 5 Per la v.a. X si ha $F_X(t) = \begin{cases} 0 & & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq & t < b \\ 1 & b \leq & t \end{cases}$
Calcoliamo la funzione di ripartizione di $Y = aX + b$.
Caso $c > 0$

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(cX + d \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-d}{c}\right) = F_X\left(\frac{t-d}{c}\right)$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & & \left(\frac{t-d}{c}\right) < a \\ \frac{\left(\frac{t-d}{c}\right)-a}{b-a} & a \leq & \left(\frac{t-d}{c}\right) < b \\ 1 & b \leq & \left(\frac{t-d}{c}\right) \end{cases}$$

dopo un po' di manipolazioni diventa:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & & t < \tilde{a} \\ \frac{t-\tilde{a}}{\tilde{b}-\tilde{a}} & \tilde{a} \leq & t < \tilde{b} \\ 1 & \tilde{b} \leq & t \end{cases}$$

con $\tilde{a} = ac + d$ e $\tilde{b} = bc + d$. Dunque Y è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(ac + d, bc + d)$.
Caso $c < 0$ Procedendo in maniera analoga al caso $c > 0$ si ottiene $Y \sim Unif(bc + d, ac + d)$

Esercizio 6
(a) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = p \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y.

(b)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(Z \le z, X = 0) + P(Z \le z, X = 1) \\
&= P(X + Y \le z, X = 0) + P(X + Y \le z, X = 1) \\
&= P(Y \le z, X = 0) + P(1 + Y \le z, X = 1) \\
&= P(Y \le z, X = 0) + P(Y \le z - 1, X = 1) \\
&= P(Y \le z) \cdot P(X = 0) + P(Y \le z - 1) \cdot P(X = 1) \\
&= F_Y(z) \cdot 0.5 + F_Y(z - 1) \cdot 0.5
\end{aligned}$$

Sapendo che Y è esponenziale di parametro 3, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-3y} & y > 0 \end{cases}$$

e dunque considerando i tre casi, $z < 0$, $0 \le z < 1$ e $z \ge 1$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) & 0 \le z < 1 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) + 0.5 \cdot (1 - e^{-3(z-1)}) & z \ge 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \le t) = P(T \le t, X = 0) + P(T \le t, X = 1) \\
&= P(X \cdot Y \le z, X = 0) + P(X \cdot Y \le t, X = 1) \\
&= P(0 \le t, X = 0) + P(Y \le t, X = 1) \\
&= P(0 \le t) \cdot P(X = 0) + P(Y \le t) \cdot P(X = 1) \\
&= P(t \ge 0) \cdot 0.5 + F_Y(t) \cdot 0.5
\end{aligned}$$

considerando i due casi, $t < 0$, e $t \ge 0$ si ha:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-3t}) & t \ge 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}
P(Z > 2T) &= P(X + Y > 2X \cdot Y) \\
&= P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 0) + P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0, X = 0) + P(1 + Y > 2Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0) \cdot P(X = 0) + P(Y < 1) \cdot P(X = 1) \\
&= 1 \cdot 0.5 + (1 - e^{-3}) \cdot 0.5 \\
&= 1 - 0.5 \cdot e^{-3}
\end{aligned}$$

Esercizio 7

$$\mathbb{E}[X_1] = np = \tfrac{3}{2} \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \tfrac{3}{4} \qquad \mathbb{E}[X_1^2] = 3$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \qquad \mathrm{VAR}(X_2) = 1 \qquad \mathbb{E}[X_2^2] = 10$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \tfrac{1}{\lambda} = 2 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \tfrac{1}{\lambda^2} = 4 \qquad \mathbb{E}[X_3^2] = 8$$

Dove $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = 4) = 3$.
$\mathbb{E}[X_2^2] = 2^2 \cdot P(X = 2) + 4^2 \cdot P(X = 4) = 10$
$\mathrm{VAR}(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = 1$
Mentre per X_1 e X_2 si può utilizzare la formula $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \mathrm{VAR}(X_i)$.
(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$$

$$\mathrm{VAR}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = 240 - 81 = 159$$

(b)

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1} \cdot e^{X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{X_2}]$$

Calcoliamo separatamente $\mathbb{E}[e^{X_1}]$ $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \sum_k e^k \cdot P(X_1 = k) =$$

$$= e^0 \cdot P(X_1 = 0) + e^1 \cdot P(X_1 = 1) + e^2 \cdot P(X_1 = 2) + e^3 \cdot P(X_1 = 3) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8}$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \sum_k e^k \cdot P(X_2 = k) = e^2 \cdot P(X_2 = 2) + e^4 \cdot P(X_2 = 4) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \frac{e^2 + e^4}{2}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8} \cdot \frac{e^2 + e^4}{2}$$

(c) $Z = X_2 + X_3$. Prima di tutto osserviamo che X_2 può assumere solo i valori 2 e 4 mentre X_3 è una v.a. a valori in $(0, +\infty)$ con funzione di ripartizione:

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(Z \leq 1) = P(X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq -1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -3) = 0$$

Si procede in maniera analoga per $P(Z \leq 3)$

$$P(Z \leq 3) = P(X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq -1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Calcoliamo infine $P(Z \leq 5)$

$$P(Z \leq 5) = P(X_2 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq 1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{3}{2}\cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

(d) Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il punto (c) si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 2 \\ \frac{1 - e^{-\frac{z-2}{2}}}{2} & 2 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{z-2}{2}} + e^{-\frac{z-4}{2}}}{2} & z \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 8

(a) $\frac{3}{8}$, $\frac{87}{64}$

(b) $\frac{3}{4}(e^{-3} - e^{-4}) \simeq 0.0236$

(c) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(e^{-2w}) & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$

(d) 2

Esercizio 10

(a) $P(Y \in (0,4)) = 1$

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 \leq y < 4 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$$

(c)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0,4) \end{cases}$$

Esercizio 11

(a)

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1-(1-w)^n & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w \notin (0,1) \\ n(1-w)^{n-1} & w \in (0,1) \end{cases}$$

(c)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(d)

$$f_t(t) = \begin{cases} 0 & t \notin (0,1) \\ nt^{n-1} & t \in (0,1) \end{cases}$$

(e) $\mathbb{E}[T] = \frac{n}{n+1}$

(f)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1-(1-y)^n & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

(g) E' facile verificare che le v.a. W e Y hanno la stessa distribuzione quindi $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1-T] = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$