

Esercitazione del 04/06/2015  
Probabilità e Statistica  
Foglio 13

David Barbato

**Approssimazioni normali.**

**Theorem 1** (Teorema del limite centrale). *Siano  $X_1, \dots, X_n$  variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite che ammettono media e varianza finita,  $E[X_i] = \mu$ ,  $VAR[X_i] = \sigma^2$ . Se poniamo  $Y_n = X_1 + \dots + X_n$  allora per ogni  $x \in \mathbb{R}$  vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad (1)$$

dove  $\Phi$  indica la funzione di ripartizione di una normale standard.

In pratica il teorema dice che per  $n$  grande la distribuzione di  $\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  è vicina a quella di una variabile aleatoria normale standard. Il seguente teorema di Berry Essen permette di avere una stima della velocità con cui il limite (1) converge.

**Theorem 2** (Teorema di Berry Essen). *Nelle stesse ipotesi del teorema 1 se  $\mathbb{E}[|X_i - \mu|^3] = \rho < \infty$  allora vale:*

$$\left| P\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{\rho}{2\sigma^3\sqrt{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che nelle ipotesi del teorema  $\mathbb{E}[Y_n] = n\mu$  e  $VAR[Y_n] = \sigma^2 n$ . Dunque se denotiamo con  $\mu_{Y_n} := \mathbb{E}[Y_n]$  e  $\sigma_{Y_n}^2 = VAR[Y_n]$  allora la (1) è equivalente a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - \mu_{Y_n}}{\sigma_{Y_n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad (2)$$

Noi utilizzeremo di solito la relazione (2) per stimare la distribuzione di  $Y_n$  supponendo quindi che per  $n$  grande  $\frac{Y_n - \mu_{Y_n}}{\sigma_{Y_n}}$  sia approssimativamente una normale standard. Vediamo un esempio:

**Esempio 3.** *Sia  $Y \sim Bin(n = 1000, p = \frac{1}{3})$ . Stimare la probabilità che  $Y$  sia maggiore di 350.*

*Svolgimento.* (Risolveremo l'esercizio senza utilizzare la correzione di continuità che vedremo più avanti. La correzione di continuità permette di ottenere una stima di  $P(Y > 350)$  molto più precisa di quella che otterremo ora.

La soluzione con correzione di continuità è data dalla (6). Ad eccezione di questo primo esempio utilizzeremo sempre la correzione di continuità quando ce ne saranno le condizioni.)

Supponiamo che  $X_1, \dots, X_{1000}$  sia variabili bernoulliane indipendenti di parametro  $p = \frac{1}{3}$  e che  $Y = X_1 + \dots + X_{1000}$ . Per  $Y$  vale  $\mathbb{E}[Y] = \frac{1000}{3} =: \mu_Y$  e  $Var[Y] = \frac{2000}{9} =: \sigma_Y^2$ .

$$P(Y > 350) = 1 - P(Y \leq 350) = 1 - P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{350 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Stimiamo l'ultima probabilità utilizzando la (2)

$$P(Y > 350) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{350 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq 1 - \Phi(1.12) \quad (3)$$

Utilizzando la tavola normale si ottiene

$$P(Y > 350) \simeq 1 - 0.86864 = 0.13136 \quad (4)$$

□

**Procedimento di Approssimazione Normale.** In sintesi. Se  $Y$  è una (qualsiasi) variabile aleatoria con distribuzione approssimativamente normale allora il procedimento di approssimazione normale consiste nello stimare la distribuzione  $Y$  con la distribuzione di una variabile aleatoria  $T \sim N(\mu, \sigma^2)$  normale con media  $\mu = \mathbb{E}[Y]$  e varianza  $\sigma^2 = VAR[Y]$ . Cioè la distribuzione di  $Y$  è stimata con quella di una variabile aleatoria che ha stessa media e varianza ma ha distribuzione esattamente normale. Nella pratica poiché siamo in grado di calcolare la funzione di distribuzione della variabile normale standard (tramite le tavole) allora si preferirà stimare la distribuzione di  $\frac{Y - \mu}{\sigma}$  approssimandola con quella di una normale standard. Per esempio

$$P(Y \leq x) = P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{x - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq \Phi\left(\frac{x - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

**Correzione di continuità.** La correzione di continuità permette di avere stime più precise e si applica quando la variabile da approssimare  $X$  è una v.a. a valori in  $\mathbb{Z}$  (di solito binomiale o di Poisson). La correzione di continuità è cruciale per avere una buona approssimazione quando la varianza non è molto grande. Illustriamo il procedimento con un esempio. Sia  $X \sim Bin(n, p)$ ,  $\mu = np$  e  $\sigma^2 = np(1 - p)$ . Le seguenti probabilità sono uguali

$$P(X \leq 60) = P(X \leq 60.5) = P(X < 61) \quad (5)$$

mentre per  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  si ha

$$P(Y \leq 60) \neq P(Y \leq 60.5) \neq P(Y < 61)$$

La approssimazione migliore per la probabilità (5) è data da:

$$P(X \leq 60) = P(X \leq 60.5) = P(X < 61) \simeq P(Y \leq 60.5) = \Phi\left(\frac{60.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Torniamo ad analizzare l'**esempio 3** in quel caso si aveva:

$$P(Y > 350) = P(Y > 350.5) = P(Y \geq 351)$$

procedendo come in (3) e (4) si ottengono le tre stime

$$P(Y > 350) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{350 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq 0.13136$$

$$P(Y > 350.5) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{350.5 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq 0.12507$$

$$P(Y \geq 351) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{351 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq 0.11702$$

La stima ottenuta utilizzando un computer è 0.12498.

*Soluzione dell'esempio 3 con approssimazione normale e correzione di continuità.*

$$P(Y > 350.5) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{350.5 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \simeq 0.12507 \quad (6)$$

□

**Esercizio 1.** Una nota società assicurativa ha  $N = 250000$  assicurati, di cui 150000 uomini e 100000 donne. Da una statistica risulta che la probabilità di un uomo di avere un incidente grave in un anno è del 3% mentre questa probabilità scende a 1.5% per le donne.

(a) Calcolare la probabilità che una persona assicurata (scelta a caso) abbia un incidente grave nel prossimo anno?

(b) Sapendo che una persona assicurata ha avuto un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un uomo?

(c) Calcolare la media e la varianza del numero complessivo di assicurati che hanno un incidente grave in un anno?

La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno

un incidente grave il prossimo anno supera 6200 allora la società andrà in perdita.

(d)\* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 6200.

**Esercizio 2.** Nel comune di Padova sono presenti 2500 lampioni, di cui 1000 nel centro storico e 1500 fuori dal centro storico. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità  $p = \frac{1}{1000}$  di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.

(a) Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina? (Scrivere la formula.)

(b) Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?

(c) Qual è il numero medio e la varianza del numero totale di lampadine fulminate in un anno (365 giorni)?

(d)\* La ditta che ha avuto l'appalto per la sostituzione delle lampadine nel 2009 ha acquistato 950 lampadine per le sostituzioni. Calcolare la probabilità che siano sufficienti. (Utilizzare l'approssimazione normale.)

**Esercizio 3.** Un docente ha 70 studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità  $p$  e  $1 - p$  rispettivamente. Supponiamo  $p = 0.01$  e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.

(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.

(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?

(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia  $T$  il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di  $T$ .

(d)\* Stimare la probabilità che vi siano 30 o più ricevimenti in cui non si presenti nessuno. (Utilizzare l'approssimazione normale.)

**Esercizio 4.** La pizzeria "Da Gigi" vende pizze da asporto e bibite. Il numero di pizze vendute in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda_1 = 40$ , mentre il numero di bibite vendute in un giorno si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro  $\lambda_2 = 0.5$ . Consideriamo inoltre il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti.

- (a) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso (tra quelli in cui la pizzeria è aperta) venga venduta una sola bibita.
- (b) In una settimana lavorativa di 6 giorni, qual è la probabilità che vengano vendute almeno 3 bibite?
- (c) Il prossimo anno la pizzeria "Da Gigi" rimarrà aperta 255 giorni, calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno.
- (d)\* Gigi, che è un pizzaiolo parsimonioso, ha deciso che per il prossimo anno metterà da parte 50 centesimi per ogni pizza venduta. Stimare la probabilità che in un anno (255 giorni lavorativi) Gigi riesca a mettere da parte più di 5000 euro.

**Esercizio 5.** Nel gioco del superenalotto, giocando una sestina qualsiasi la probabilità di fare 3 è circa  $p_3 = 0.0031$ .

- (a) Se Alfredo gioca due sestine (la giocata minima) ogni concorso (ci sono due concorsi a settimana) per 6 anni, quante volte farà 3 in media?
- (b) Stimare la probabilità che in 6 anni non realizzi mai 3.
- (c) La probabilità di fare 6 è circa una su 623 milioni. Stimare, utilizzando l'approssimazione Poissoniana, la probabilità che Alfredo realizzi almeno un 6.
- (d) Supponiamo che in un concorso vengano giocate 5 milioni di sestine (indipendenti e scelte in maniera casuale). Calcolare la media e la varianza del numero di 3 realizzati.
- (e)\* Stimare la probabilità che giocando 6 milioni di sestine si realizzino più di 19000 tre. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana.)

**Esercizio 6.** Una società assicurativa ha assicurato 200.000 autovetture: 140.000 di grossa cilindrata e 60.000 di piccola cilindrata. Da una statistica interna condotta dalla società risulta che una macchina di grossa cilindrata ha una probabilità  $p_1 = \frac{1}{70}$  di avere un incidente grave entro un anno, mentre per le auto di piccola cilindrata questa probabilità è  $p_2 = \frac{1}{150}$ . Supponiamo infine che gli incidenti siano indipendenti tra di loro.

- (a) Qual è il valore medio e la varianza del numero totale di assicurati che avranno un incidente grave il prossimo anno?
- (b) Se un'autovettura assicurata ha un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un'auto di grossa cilindrata?
- La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 2.500 allora la società andrà in perdita.
- (c)\* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 2.500.
- (d)\* Supponendo che nei prossimi dieci anni il numero di assicurati rimanga

costante e che anche le probabilità di avere incidenti rimangano costanti e siano ancora indipendenti.

Calcolare la media e la varianza del numero di incidenti complessivi provocati dagli assicurati nei prossimi 10 anni? Qual è la probabilità che tale numero superi 25.000.

## Soluzioni

### Esercizio 1

Sia  $U$  l'evento l'assicurato è un uomo

$D$  l'evento l'assicurato è un donna

$I$  l'evento l'assicurato avrà un incidente nel prossimo anno.

Per ipotesi  $P(U) = 150000/250000 = 0.60 = 60\%$ ,

$P(D) = 100000/250000 = 0.40 = 40\%$ ,

$P(I|U) = 3\% = 0.03$  e  $P(I|D) = 1.5\% = 0.015$

(a)  $P(I) = P(I \cap U) + P(I \cap D) = P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D) = 0.03 \cdot 0.60 + 0.015 \cdot 0.40 = 0.024$

(b) Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(U|I) = \frac{P(I|U) \cdot P(U)}{P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D)} = \frac{0.018}{0.024} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(c) Siano  $(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$  e  $(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$  le seguenti variabili:

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima donna assicurata avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesima donna assicurata non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$

$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesimo uomo assicurato avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesimo uomo assicurato non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$

$(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$  famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.015

$(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$  famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.03

Il numero totale di incidenti del prossimo anno sarà

$$T = \sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i$$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{150000}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \cdots + \mathbb{E}[Y_{150000}] = \\
&= \overbrace{0.015 + 0.015 + \cdots + 0.015}^{100000 \text{ volte}} + \overbrace{0.03 + 0.03 + \cdots + 0.03}^{150000 \text{ volte}} = \\
&= 100000 \cdot 0.015 + 150000 \cdot 0.03 = 6000 \\
&\text{VAR}[T] = \text{VAR}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] = \\
&= \text{VAR}[X_1 + X_2 + \cdots + X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{150000}] = \\
&= \text{VAR}[X_1] + \text{VAR}[X_2] + \cdots + \text{VAR}[X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1] + \text{VAR}[Y_2] + \cdots + \text{VAR}[Y_{150000}] = \\
&= \overbrace{0.015 \cdot (1 - 0.015) + 0.015 \cdot (1 - 0.015) + \cdots + 0.015 \cdot (1 - 0.015)}^{100000 \text{ volte}} + \\
&\quad + \overbrace{0.03 \cdot (1 - 0.03) + 0.03 \cdot (1 - 0.03) + \cdots + 0.03 \cdot (1 - 0.03)}^{150000 \text{ volte}} = \\
&= 100000 \cdot 0.015 \cdot (1 - 0.015) + 150000 \cdot 0.03 \cdot (1 - 0.03) = 5842.5
\end{aligned}$$

Un altro approccio possibile per la risoluzione del punto (c) poteva essere quello di considerare le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ ,  $X := \sum_{i=1}^{100000} X_i$  e  $Y := \sum_{i=1}^{150000} Y_i$ .  $X$  e  $Y$  sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, la  $X$  di parametri 100000 e 0.015 e la  $Y$  di parametri 150000 e 0.03. Dunque  $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$  e  $\text{VAR}[T] = \text{VAR}[X] + \text{VAR}[Y]$ .

(d) Sia  $\mu = \mathbb{E}[T] = 6000$  e sia  $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[T]} = 76.436$ . Approssimare  $T$  con una variabile aleatoria gaussiana vuol dire scegliere una variabile aleatoria gaussiana  $W$  con la stessa media e varianza di  $T$  cioè  $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(6000, 5842.5)$ . Utilizzando l'approssimazione di continuità la probabilità cercata diventa:

$$P(T > 6200) \approx P(W > 6200.5)$$

per ricondursi ad una normale standard si utilizza l'approccio usuale di sottrarre la media e dividere per la deviazione standard.

$$P(W > 6200.5) = P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} > \frac{6200.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Sia  $Z := \frac{W - \mu}{\sigma}$ ,  $Z$  è una normale standard e svolgendo i calcoli a destra risulta:

$$P(W > 6200.5) = P(Z > 2.623)$$

Dunque

$$P(W > 6200.5) = 1 - \phi(2.623) = 0.0044 = 0.44\%$$

### Esercizio 2

(a) Vi sono in totale  $n = 2500$  lampadine e ciascuna ha una probabilità  $p = \frac{1}{1000}$  di fulminarsi. Denotiamo con  $X$  il numero totale di lampadine fulminate nella notte.  $X$  ha una distribuzione Binomiale di parametri  $n = 2500$  e  $p = \frac{1}{1000}$  dunque

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} (1-p)^n p^0 = (0.999)^{2500} \simeq 0.082$$

Una altra possibile risoluzione del quesito (a). La probabilità di una lampadina di non fulminarsi è  $1-p = 0.999$  dunque per l'indipendenza la probabilità per 2500 lampadine di non fulminarsi durante la notte è:

$$\overbrace{0.999 \cdot 0.999 \cdot \dots \cdot 0.999}^{2500 \text{ volte}} = 0.999^{2500} \simeq 0.082$$

(b) Tutte le lampadine hanno uguale probabilità di fulminarsi, nel centro storico vi sono 1000 lampadine su un totale di 2500. Possiamo calcolare la probabilità cercata come rapporto tra casi FAVOREVOLI e casi POSSIBILI.

$$P(\text{La lampadina fulminata è nel centro storico}) = \frac{1000}{2500} = 0.4 = 40\%$$

(c) Indichiamo con  $Y$  il numero di lampadine fulminate in un anno. Sia  $X_{i,j}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, 2500\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, 365\}$  una variabile bernoulliana con:

$$X_{i,j} =$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Se la } i\text{-esima lampadina il giorno } j\text{-esimo si è fulminata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $Y = \sum_{i,j} X_{i,j}$ ,  $Y$  è somma di  $2500 \cdot 365$  variabili bernoulliane di parametro  $p = \frac{1}{1000}$ . Dunque  $Y$  è una variabile aleatoria binomiale di parametri  $p = \frac{1}{1000}$  e  $N = 2500 \cdot 365 = 912500$ .

$$\mathbb{E}[Y] = Np = 912.5$$

$$\text{VAR}[Y] = Np(1-p) \simeq 911.59$$

(d) Approssiamo  $Y$  con una variabile aleatoria normale  $W$  con media e varianza uguali a media e varianza di  $Y$ .

$$W \sim \mathcal{N}(912.5, 911.6)$$



applicando la correzione di continuità si ha

$$P(Y \leq 950) \simeq P(W < 950.5) = P\left(\frac{W - 912.5}{30.19} < \frac{950.5 - 912.5}{30.19}\right)$$

Sia  $Z = \frac{W-912.5}{30.19}$  dunque  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

$$P(W < 950.5) = P(Z < 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89617$$

### Esercizio 3

(a) Sia  $n = 70$  il numero degli studenti e sia  $p = 0.01$  la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia  $X$  la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano  $Y_1, \dots, Y_{70}$  le variabili aleatorie a valori in  $\{0, 1\}$  così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Se l}'i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora  $Y_i$  sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro  $p = 0.01$  e  $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$  ha distribuzione binomiale  $X \sim Bin(n = 70, p = 0.01)$  e la sua media è data da  $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$ .

(b) La probabilità cercata è

$$P(X = 0) = \binom{70}{0} \cdot p \cdot (1 - p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare  $P(X = 0)$  approssimando la  $X$  con una v.a.  $Y$  di Poisson avremmo avuto  $Y \sim Poisson(0.7)$  e

$$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965.$$

(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è  $p_2 = 0.4948$  (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a.  $T$  ha distribuzione binomiale  $T \sim Bin(50, 0.4948)$ .

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$Var[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \simeq 12.50$$

(d) Sia  $\mu = E[T]$  e sia  $\sigma^2 = Var[T]$ . Sia  $W$  una variabile aleatoria normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Utilizzando la correzione di continuità possiamo stimare la probabilità cercata  $P(T \geq 30)$  con  $P(W > 29.5)$ .

$$\begin{aligned} P(W > 29.5) &= 1 - P(W < 29.5) = 1 - P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} < \frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(1.35) \simeq 0.09 \end{aligned}$$

**Esercizio 4**

(a) Indichiamo con  $X$  il numero di bibete vendute,  $X$  è una variabile di Poisson di parametro 0.5 dunque ha distribuzione:

$$P(X = k) = \frac{0.5^k}{k!} e^{-0.5} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque per  $k = 1$  si ha:

$$P(X = 1) = \frac{0.5}{1} e^{-0.5} \simeq 0.303$$

(b) Siano  $X_1, X_2, \dots, X_6$  le variabili aleatorie che indicano le bibite vendute nei sei giorni lavorativi della settimana, sia  $X_s := X_1 + X_2 + \dots + X_6$  il numero di bibite vendute in una settimana di sei giorni lavorativi. Poiché  $X_s$  è somma di variabili di Poisson indipendenti allora anche  $X_s$  sarà di Poisson e la sua media sarà la somma delle medie cioè  $X_s \sim Poisson(3)$ . Dove  $3 = 6 \cdot 0.5$ .

$$\begin{aligned} P(X_s \geq 3) &= 1 - P(X_s < 3) = 1 - (P(X_s = 0) + P(X_s = 1) + P(X_s = 2)) = \\ &= 1 - \left( \frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} \right) = 1 - \frac{17}{2} e^{-3} \simeq 0.5768 = 57.68\% \end{aligned}$$

(c) Denotiamo con  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{255}$  il numero di bibite vendute nei 255 giorni di apertura della pizzeria e sia  $Y := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{255}$  il numero di pizze vendute in un anno.

Metodo di risoluzione 1:  $\mathbb{E}[Y_i] = 40$ ,  $VAR[Y_i] = 40$  e dunque per l'indipendenza delle  $Y_i$  si ha  $\mathbb{E}[Y] = 255 \cdot 40 = 10200$  e  $VAR[Y] = 255 \cdot VAR[Y_i] = 10200$ .

Metodo di risoluzione 2: poiché  $Y$  è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti si ha  $Y \sim Poisson(255 \cdot 40 = 10200)$  e dunque  $\mathbb{E}[Y] = 10200$  e  $VAR[Y] = 10200$ .

(d) Denotiamo ancora con  $Y$  le pizze vendute in un anno di 255 giorni lavorativi e con  $Z := Y \cdot 0.50$  i soldi in euro messi da parte. Il problema si riduce a stimare la probabilità che  $Y > 10000$  oppure che  $Z > 5000$ . Dal punto (c) sappiamo che  $\mathbb{E}[Y] = 10200$  e  $VAR[Y] = 10200$ .

Metodo 1: Per stimare  $P(Y > 10000)$  possiamo approssimare  $Y$  con una variabile aleatoria gaussiana  $T$  di media  $\mu = 10200$  e varianza  $\sigma^2 = 10200$ . Allora utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$P(Y > 10000) \simeq P(T > 10000.5) = 1 - P(T \leq 10000.5) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{10000.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

Metodo 2: Supponiamo invece di voler stimare  $P(Z > 5000)$ , allora prima di tutto dobbiamo calcolare speranza e varianza di  $Z$ . Poiché  $Z = Y \cdot 0.5$  si ha  $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \cdot 0.5 = 5100$  e

$$VAR[Z] = VAR[Y] \cdot (0.5)^2 = 2550.$$

(La variabile aleatoria  $Z$  non è di Poisson!). La variabile aleatoria  $Z$  non è a valori interi quindi non è possibile applicare la correzione di continuità. Senza usare la correzione di continuità si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} P(Z > 5000) &\simeq P(S > 5000) = 1 - P(S \leq 5000) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{5000 - 5100}{\sqrt{2550}}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\% \end{aligned}$$

#### **Esercizio 5**

- (a) 3.9
- (b) 2%
- (c) circa  $2 \cdot 10^{-6}$  ovvero  $\frac{1}{500000}$
- (d) 15500, 15452
- (e) 0.0016

#### **Esercizio 6**

- (a) 2400, 2368.76
- (b)  $\frac{5}{6}$
- (c)  $1 - \phi(2.06) = 0.0197$
- (d) 24000, 23687.6,  $1 - \phi(6.5) \simeq 0$