Esercitazione del 04/06/2015
Probabilità e Statistica
Foglio 14

David Barbato

Esercizio 1. *Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).*
(a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.
(b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.
(c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.
(d) Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. *(Lancio sempre la stessa moneta.)*

Esercizio 2. *In uno dei suoi celebri esperimenti, Mendel esaminò il colore di 580 piante di piselli. Supponiamo che ciascuna pianta di piselli abbia una probabilità $p = \frac{1}{4}$ di avere i frutti gialli, e che tali probabilità siano indipendenti.*
(a) Calcolare la media e la varianza del numero totale di piante di piselli gialle.
(b) Stimare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che il numero totale di piante dai frutti gialli sia (strettamente) compreso tra 120 *e* 180.
(c) Mendel osservò 152 piante dai frutti gialli. Calcolare la probabilità che il numero totale di piante dai piselli gialli sia 152. *Dapprima utilizzare la distribuzione binomiale (scrivere solo la formula) e poi stimare tale probabilità utilizzando l'approssimazione normale.*
(d) Supponendo che la probabilità di avere frutti gialli fosse stata invece $p = \frac{1}{2}$ quale sarebbe stata la probabilità di osservare un numero di piante dai frutti gialli compreso tra 120 *e* 180*?*

Esercizio 3. *Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.*
(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.

(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.
(c) Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.

Esercizio 4. *Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 31$:*
(a) Calcolare $\mathbb{E}[2X + 3]$.
(b) Calcolare $VAR[2X + 3]$.
(c) Stimare $P(X >= 17)$.(Utilizzare l'approssimazione gaussiana con la correzione di continuità)

Esercizio 5. *Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 2)$, sia g la funzione definita da*

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{E}[g(X)]$.

Esercizio 6. *Una macchina per il confezionamento del latte riempe i cartoni con una quantità di latte casuale, rappresentata da una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Il valore di riempimento ideale sarebbe 1000 ml, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata accettabile se contiene tra 975 e 1025 ml di latte, e difettosa altrimenti.*
(a) Se $\mu = 1000$ e $\sigma = 10$. Qualè la probabilità che una confezione sia difettosa.
(b) Supponiamo ancora che $\mu = 1000$, per quali valori di σ la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del 5%?

Esercizio 7. `Calcolo delle Probabilità 18/11/2010`

Sia X una variabile aleatoria normale con distribuzion e $X \sim N(0, 9)$. Sia $Y = max\{X, 0\}$.
(a) Dimostrare che Y ha funzione di ripartizione:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \phi\left(\frac{t}{3}\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

(b) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 8. *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ che X_2 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ e che X_3 abbia invece una distribuzione di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ di*

parametro $\lambda = 1$. Siano infine $T = X_1 + X_2 + X_3$, $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $W = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare il valore atteso e varianza di T.
(b) Calcolare il valore atteso e varianza di Z (utilizzare la formula $VAR(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$).
(c) Calcolare $P(W < \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)]$.

Esercizio 9. *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{3}$ che X_2 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 3$ che X_3 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 2$. Siano infine $T = X_1 + 2X_2 + 3X_3$, $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.*
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T.
(b) Calcolare $P(X_3 < X_1)$.
(c) Calcolare $P(Z > \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{1}{1+X_2}]$.

Esercizio 10. *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti.*
Sia X_1 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{4}$.
Sia X_2 v.a. con distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 5$ e $\sigma = 3$.
Sia X_3 una variabile aleatoria discreta a valori in $\{4, 7\}$ con $P(X_3 = 4) = \frac{1}{3}$ e $P(X_3 = 7) = \frac{2}{3}$.
Siano infine $T = 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare media, varianza e momento del secondo ordine di X_3.
(b) Calcolare media e varianza di T.
(c) Calcolare $P(Z > 6)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)]$.

Esercizio 11. *Sia X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Sia X_1 v.a. con distribuzione uniforme su $(0, 4)$. Sia X_2 v.a. normale di media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Sia X_3 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$. Siano infine $Z = X_1 + X_2 + 7 \cdot X_3$ e $W = max(X_1, X_3)$.*
(a) Calcolare media e varianza di Z.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2^2]$. $\mathbb{E}[X_3^3]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X_3 \cdot (X_3 + 1) \cdot (X_3 + X_2)]$.
(d) Calcolare $P(X_3 > X_1)$.
(e) Calcolare F_W.

Esercizio 12. *Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia Poissoniana di parametro $\lambda = 3$, Y sia Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{2}$, mentre Z ha distribuzione normale di media $\mu = 0$*

e varianza $\sigma^2 = 1$.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y - Z]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X^2 + Y^2 + Z^2]$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.
(e) Calcolare $P(X + Y = 0)$.
(f) Calcolare $P(X \cdot Y = 0)$.
(g) Calcolare $P(Y \cdot Z = 0)$.
(h) Calcolare $P(Y \cdot Z > 0)$.
(i) Calcolare $\mathbb{E}[Y^6]$.
(l) Calcolare $P[X = Y]$.
(m) Calcolare $P(Z > Y)$. *(Utilizzare* $\phi(0) = 0.5$*,* $\phi(1) = 0.84134$ *e* $\phi(2) = 0.97725$*)*

Esercizio 13. *Sia* X *una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità* f_X *data da*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha - x}{2} & 0 \le x < \alpha \\ 0 & \alpha \le x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.
(a) Determinare α.
(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(d) Sia Y *una v.a. uniforme sull'intervallo* $(0, 1)$*, trovare una funzione* g *da* $(0, 1)$ *in* $\mathbb{R}$ *non decrescente tale che posto* $Z = g(Y)$ *si abbia* $Z \sim X$.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[g(Y)]$*, utilizzando la formula per il calcolo del valore medio di una funzione di variabile aleatoria assolutamente continua. (Verificare che* $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[X]$*)*

Soluzioni

Esercizio 1
(a) $\frac{7}{8}$, (b) $\frac{7}{20}$, (c) $\frac{3}{7}$, (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}(1 - \Phi(2.1)) \simeq 0.50536$

Esercizio 2
(a) 145, 108.75
(b) $\phi(3.31) - \phi(-2.35) = 0.99014$
(c) $\binom{580}{152} \cdot (\frac{1}{4})^{152} \cdot (\frac{3}{4})^{428}$, $\quad \phi(0.72) - \phi(0.62) = 0.03187$
(d) $\phi(-9.18) - \phi(-14.08) \simeq 0$

Esercizio 5

$\mathbb{E}[g(X)] = -\infty$

Esercizio 8

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}[X_1] = np = 1 & \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{1}{2} & \mathbb{E}[X_1^2] = np(1-p) + n^2p^2 = \frac{3}{2} \\ \mathbb{E}[X_2] = \mu = 1 & \mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 1 & \mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 2 \\ \mathbb{E}[X_3] = \lambda = 1 & \mathrm{VAR}(X_3) = \lambda = 1 & \mathbb{E}[X_3^2] = \lambda + \lambda^2 = 2 \end{array}$$

Dove $\mathbb{E}[X_i^2]$ può essere ottenuto anche come $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \mathrm{VAR}(X_i)$.

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}(T) &= \mathrm{VAR}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathrm{VAR}(X_1) + \mathrm{VAR}(X_2) + \mathrm{VAR}\ (X_3) = \\ &= \tfrac{1}{2} + 1 + 1 = \tfrac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$\mathrm{VAR}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 6 - 1 = 5$$

(c)

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = P\left(\max(X_1, X_2, X_3) < \frac{1}{2}\right) = P\left(X_1 < \frac{1}{2},\ X_2 < \frac{1}{2},\ X_3 < \frac{1}{2}\right) =$$

$$= P\left(X_1 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_3 < \frac{1}{2}\right) = P(X_1 = 0) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P(X_3 = 0)$$

Utilizzando le definizioni di densità discreta per variabili binomiali e di Poisson si ha :

$$P(X_1 = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4} \qquad P(X_3 = 0) = e^{-\lambda} = e^{-1}$$

Per calcolare $P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right)$ bisogna ricondursi ad una normale standard:

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < -\frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = 1 - \phi(\frac{1}{2}) = 0.3085$$

dunque

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0.3085 \cdot e^{-1} = 0.0284$$

(d) Prima di tutto osserviamo che le variabili $(X_1 + X_2)$ e $(X_2 + X_3)$ **non** sono indipendenti (perché hanno entrambe X_2 come addendo). Sviluppando il prodotto si ha:

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)] = \mathbb{E}[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2X_3] =$$
$$= \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$
$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Esercizio 9

$$\mathbb{E}[X_1] = \tfrac{1}{3} \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \quad \mathrm{VAR}(X_2) = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \mu = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \sigma^2 = 4$$

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + 2X_2 + 3X_3] = \mathbb{E}[X_1] + 2\mathbb{E}[X_2] + 3\mathbb{E}[X_3] =$$
$$= \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = \frac{1}{3} + 3 + 3 = \frac{19}{3}$$

$$\mathrm{VAR}(T) = \mathrm{VAR}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = \mathrm{VAR}(X_1) + 4 \cdot \mathrm{VAR}(X_2) + 9 \cdot \mathrm{VAR}(X_3) =$$
$$= \frac{2}{9} + 3 + 36 = \frac{353}{9}$$

(b)

$$P(X_3 < X_1) = P(X_3 < X_1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < X_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$

$$= P(X_3 < 0 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$

$$= P(X_3 < 0)\frac{2}{3} + P(X_3 < 1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{1 - 1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi\left(0\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi\left(0\right)$$
$$\frac{2}{3} \cdot (0.30854) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.37236$$

(c)

$$P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - P(Z \leq \frac{1}{2}) =$$
$$1 - P(X_1 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_2 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_3 \leq \frac{1}{2}) =$$
$$1 - P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} \leq \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.9666$$

(d)

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + X_2}\right] = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{1 + k} \cdot P(X_2 = k) =$$
$$1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{12 + 18 + 12 + 3}{12 \cdot 8} = \frac{45}{96} = \frac{15}{32}$$

Esercizio 10

$\mathbb{E}[X_1] = p = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_1) = p(1-p) = \frac{3}{16}$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_1^2] = p = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 5$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 9$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 34$

$\mathbb{E}[X_3] = 6$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_3) = 2$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_3^2] = 38$

(a) Dove $\mathbb{E}[X_3]$, $\mathbb{E}[X_3^2]$ e $\mathrm{Var}(X_3)$ sono state ottenute tramite calcolo esplicito:

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_k k \cdot P(X_3 = k) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3} = 6$$
$$\mathbb{E}[X_3^2] = \sum_k k^2 \cdot P(X_3 = k) = 16 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{2}{3} = 38$$
$$\mathrm{Var}(X_3) = \mathbb{E}[X_3^2] - \mathbb{E}[X_3]^2 = 38 - 6^2 = 2$$

(b) Per l'indipendenza delle variabili aleatorie si ha che la speranza del prodotto è uguale al prodotto delle speranze

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = 2 \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[(2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)^2] = \mathbb{E}[4 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] =$$

$$= 4 \cdot \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 34 \cdot 38 = 1292$$

$$\mathrm{Var}(T) = 1292 - 15^2 = 1067$$

(c)

$$P(Z > 6) = P(max\{X_1, X_2, X_3\} > 6) = 1 - P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 6) =$$

$$= 1 - P(X_1 \leq 6, X_2 \leq 6, X_3 \leq 6) = 1 - P(X_1 \leq 6) \cdot P(X_2 \leq 6) \cdot P(X_3 \leq 6) =$$

$$1 - 1 \cdot F_{X_2}(6) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{6-\mu}{\sigma})}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{1}{3})}{3} \simeq 0.79$$

(d)

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[(X_1^2 - X_2^2)] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = \frac{1}{4} - 34 = -33.75$$

Esercizio 11

(a) $\frac{17}{2}$, $\frac{211}{12}$

(b) 2, 13, $\frac{1}{2}$

(c) 4

(d) $\frac{1}{8}$

(e) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w}{8} & 0 \leq w < 1 \\ \frac{w}{4} & 1 \leq w < 4 \\ 1 & w \geq 4 \end{cases}$

Esercizio 13

(a) $\alpha = 2$

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[x] = \frac{2}{3}$

(d) $g(y) = 2 - \sqrt{4 - 4y}$ per ogni $y \in (0, 1)$