Esercizio di finanza.
Probabilità e Statistica

David Barbato

Esercizio 1. *Sia $T = 2$, e sia X_0, X_1 e X_2 il valore di un titolo agli istanti 0, 1 e 2. Supponiamo inoltre che $X_0 = 1$ e che $\frac{X_n}{X_{n-1}} \in \{3, \frac{1}{2}\}$. Consideriamo l'opzione π data da:*

$$\pi(X_T) = \begin{cases} 0 & X_T \leq 1 \\ X_T - 1 & X_T > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Determinare il prezzo dell'opzione V_0 e la strategia di copertura.

Soluzioni:

Esercizio 1 Sia $V_t(X_t)$ il valore dell'opzione al tempo t. Al tempo T si ha $V_T(X_T) = \pi(X_T)$. L'esercizio ci chiede di calcolare il prezzo dell'opzione al tempo zero e la strategia di copertura. Per strategia di copertura si intende una strategia di investimento $a_t(X_t)$, $c_t(X_t)$ tali che:

$$V_0(X_0) = a_0(X_0)X_0 + c_0(X_0) \qquad V_1(X_1) = a_0(X_0)X_1 + c_0(X_0)$$

$$V_1(X_1) = a_1(X_1)X_1 + c_1(X_1) \qquad V_2(X_2) = a_1(X_1)X_2 + c_1(X_1)$$

Dato che $X_0 = 1$ e $\frac{X_n}{X_{n-1}} \in \{3, \frac{1}{2}\}$ allora i valori possibili per X_1 sono 3 e $\frac{1}{2}$ mentre i valori possibile per X_2 sono 9, $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$.
Sappiamo che $V_T(X_T) = \pi(X_T)$ quindi:

$$V_2(9) = 8 \qquad V_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad V_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

Dall'equazione $V_2(X_2) = a_1(X_1)X_2 + c_1(X_1)$ con $X_1 = 3$ e $X_2 = 9, \frac{3}{2}$ otteniamo:

$$\begin{cases} V_2(9) = a_1(3)9 + c_1(3) \\ V_2(\frac{3}{2}) = a_1(3)\frac{3}{2} + c_1(3) \end{cases} \iff \begin{cases} 8 = a_1(3)9 + c_1(3) \\ \frac{1}{2} = a_1(3)\frac{3}{2} + c_1(3) \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$a_1(3) = 1 \qquad c_1(3) = -1 \qquad V_1(3) = a_1(3) \cdot 3 + c_1(3) = 2$$

Sempre dall'equazione $V_2(X_2) = a_1(X_1)X_2 + c_1(X_1)$ con $X_1 = \frac{1}{2}$ e $X_2 = \frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ otteniamo:

$$\begin{cases} V_2(\frac{3}{2}) = a_1(\frac{1}{2})\frac{3}{2} + c_1(\frac{1}{2}) \\ \\ V_2(\frac{1}{4}) = a_1(\frac{1}{2})\frac{1}{4} + c_1(\frac{1}{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} = a_1(\frac{1}{2})\frac{3}{2} + c_1(\frac{1}{2}) \\ 0 = a_1(\frac{1}{2})\frac{1}{4} + c_1(\frac{1}{2}) \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$a_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \qquad c_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10} \qquad V_1\left(\frac{1}{2}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + c_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}$$

Dall'equazione $V_1(X_1) = a_0(X_0)X_1 + c_0(X_0)$ con $X_0 = 3$ e $X_1 = 3, \frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\begin{cases} V_1(3) = a_0(1)3 + c_0(1) \\ V_1(\frac{1}{2}) = a_0(1)\frac{1}{2} + c_0(1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = a_0(1)3 + c_0(1) \\ \frac{1}{10} = a_0(1)\frac{1}{2} + c_0(1) \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$a_0(1) = \frac{19}{25} \qquad c_0(1) = -\frac{7}{25} \qquad V_0(1) = a_0(1)\cdot 1 + c_0(1) = \frac{12}{25}$$