

Programma di Analisi Matematica 1 - a.a. 2010-11 - prof. M. Bardi

Corsi di Laurea nell'area di Ingegneria dell'Informazione, canale 1

1. Numeri e funzioni elementari.

- Nomenclatura e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Proprietà dei numeri interi e razionali; proprietà di Archimede; $\sqrt{2}$ non è razionale.
- Definizione dei numeri reali mediante gli allineamenti decimali. Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore. Proprietà di completezza (s.d.).
- Esistenza e unicità della radice (s.d.), potenze a esponente razionale e reale, esistenza e unicità dei logaritmi (s.d.) e loro proprietà.
- Modulo, disuguaglianza triangolare, regole di calcolo con le disequazioni.
- Principio d'induzione; sommatorie; disuguaglianza di Bernoulli. Fattoriali, coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton.
- Funzioni e successioni: nomenclatura, composizione, funzione inversa, grafico.
- Funzioni monotone e loro caratterizzazione mediante il rapporto incrementale; funzioni periodiche, pari e dispari.
- Funzioni esponenziali, trigonometriche e iperboliche, loro proprietà e funzioni inverse.
- I numeri complessi: operazioni e loro interpretazione geometrica. Coniugato e modulo, distanza nel piano.
- Coordinate polari e forma trigonometrica dei complessi.
- Potenze e radici n-esime in \mathbf{C} , formule di De Moivre. Forma esponenziale dei numeri complessi.
- Polinomi a coefficienti complessi: divisione con resto, teorema di Ruffini (s.d.), soluzione di equazioni di 2o grado. Teorema fondamentale dell'algebra (s.d.). Fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali.

2. Limiti di funzioni e successioni.

- Intorni in \mathbf{R} e nella retta estesa; punti di accumulazione e isolati. Punti interni e di frontiera; chiusura di un insieme. Aperti e chiusi in \mathbf{R} e loro proprietà.
- Proprietà che valgono definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e definizione di limite di funzioni reali di variabile reale. Esplicitazione della definizione nei casi particolari, unicità del limite. Limite destro e sinistro; successioni convergenti, divergenti e irregolari.
- Proprietà dei limiti: limitatezza locale, permanenza del segno, algebra dei limiti (anche in casi di funzioni infinite). Teorema del confronto. Calcolo di forme indeterminate con metodi algebrici e di confronto; limite della successione geometrica.
- Esistenza del limite di funzioni e successioni monotone. Continuità delle funzioni elementari. Il numero e .
- Limiti di funzioni composte e cambi di variabili nei limiti; limiti di $f(x)^{g(x)}$.
- Limiti notevoli e gerarchie di infinitesimi ed infiniti. Simboli o, O, \sim (o piccolo, O grande e asintotico), loro legami ed uso nel calcolo di limiti (principi di sostituzione). Infinitesimi e infiniti di ordine α .
- Sottosuccessioni e loro limiti; teorema di Bolzano-Weierstrass (s.d.) ed esistenza di sottosuccessioni convergenti (s.d.).
- Successioni di Cauchy e criterio di convergenza di Cauchy.
- Successioni ricorsive e loro limite; successione di Fibonacci e sezione aurea.

- Non esistenza di limiti mediante il teorema ponte tra funzioni e successioni (s.d.).
- Asintoti orizzontali, obliqui e verticali.
- Insiemi compatti (per successioni), loro equivalenza con i chiusi e limitati.

3. Serie numeriche e di potenze.

- Serie convergenti, divergenti e irregolari, somma di una serie. Condizione necessaria per la convergenza.
- La serie geometrica.
- Criterio di Cauchy per le serie e divergenza della serie armonica.
- Serie a termini non negativi e loro criteri di convergenza: del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice. Serie armonica generalizzata.
- Convergenza assoluta e convergenza semplice.
- Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.
- Scrittura come serie della rappresentazione decimale dei numeri reali (s.d.).
- Riordinamenti: cenni alle loro proprietà (s.d.).
- Serie di potenze: raggio di convergenza e proprietà; calcolo del raggio.

4. Funzioni continue di una variabile reale.

- Continuità in un punto, da destra e da sinistra, in un insieme; continuità delle funzioni elementari e delle funzioni composte.
- Classificazione delle discontinuità. Natura dei punti di discontinuità delle funzioni monotone (con cenni agli insiemi numerabili).
- Teorema degli zeri e metodo di bisezione. Teorema dei valori intermedi e sue conseguenze.
- Continuità delle funzioni inverse su intervalli.
- Funzioni continue su intervalli compatti, teorema di Weierstrass.
- Funzioni lipschitziane e loro proprietà.

5. Calcolo differenziale.

- Derivata di una funzione reale f di variabile reale; miglior approssimazione lineare di f e retta tangente al grafico. Continuità delle funzioni derivabili.
- Tangente verticale, derivate destre e sinistre, punti angolosi e cuspidi.
- Derivate delle funzioni elementari.
- Regole di derivazione [somma, prodotto e quoziente].
- Derivata di funzioni composte. Derivata della funzione inversa.
- Massimi e minimi locali di funzioni derivabili: teorema di Fermat.
- Teoremi di Rolle, del valor medio di Lagrange e di Cauchy.
- Test di monotonia per funzioni derivabili, caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla; condizioni sufficienti per i massimi e minimi locali.
- Teorema di de l'Hopital (dim. solo nel caso $0/0$ e $x \rightarrow a+$); teorema del limite della derivata.
- Derivate successive; funzioni di classe C^n e C^∞ .
- Funzioni convesse e concave: definizione geometrica e caratterizzazione mediante i rapporti incrementali; derivate destre e sinistre delle funzioni convesse.
- Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili una volta e di quelle derivabili due volte. Flessi.
- Studio del grafico di una funzione.

- Polinomi di Taylor e loro proprietà, teorema di Peano.
- Sviluppi asintotici delle funzioni elementari, loro uso nei limiti e nel calcolo degli ordini di infinitesimo/infinito. Test delle derivate successive per i punti stazionari.
- Formula di Taylor col resto di Lagrange, stima dell'errore nell'approssimazione delle funzioni elementari.
- Serie di Taylor e loro proprietà; le serie esponenziale, seno, coseno e binomiale.
- Continuità e derivabilità delle somme di serie di potenze (s.d.), derivazione termine a termine (s.d.) e unicità della serie di potenze che ha somma f .

6. Calcolo integrale.

- Integrale di Riemann in intervalli limitati e suo significato geometrico.
- Criterio di integrabilità (dim. solo della sufficienza) e classi di funzioni integrabili (dim. solo per le lipschitziane).
- Proprietà dell'integrale (s.d.); teorema della media; integrali su intervalli orientati.
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (dim. per $f \in C([a, b])$).
- Primitive e loro legame con gli integrali, integrale indefinito.
- Integrazione per scomposizione, per parti e per sostituzione.
- Integrazione delle funzioni razionali mediante scomposizione in fratti semplici (s.d.).
- Sostituzioni notevoli per l'integrazione di funzioni contenenti radici o funzioni trigonometriche.
- Integrazione termine a termine delle serie di potenze (s.d.); serie di Taylor di log, arctg e arcsin. Cenni al teorema di Abel sulla continuità della somma agli estremi dell'intervallo di convergenza.
- Integrali impropri di funzioni illimitate, o su intervalli illimitati, proprietà.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico.
- Assoluta integrabilità e legami con l'integrabilità in senso improprio.
- Criterio dell'integrale per la convergenza delle serie numeriche; serie armonica generalizzata.

Legenda: dim.= dimostrazione; s.d. = senza dimostrazione.

AVVERTENZE

Gli argomenti in programma si possono trovare sul testo consigliato

M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi matematica. McGraw-Hill, Milano 2007; corredato dai materiali online al sito

<http://www.ateneonline.it/bertsch/areastudenti.asp>

Ciò che non si trova lì può essere considerato facoltativo.

Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione. Non sono richieste le dimostrazioni non svolte a lezione, sono invece argomento d'esame le dimostrazioni facili di argomenti in programma che nel libro vengono lasciate al lettore.

Gli studenti che hanno seguito il corso in anni precedenti possono preparare l'esame su altri libri, ma non sono esentati dalle parti di programma che non si trovassero su tali testi. Chi sceglie un altro libro deve dichiararlo nel momento in cui viene chiamato all'esame orale.

Ulteriori esercizi si possono trovare in molti testi, ad es. in
P. Marcellini, C. Sbordone: Esercizi di Matematica, Vol. I, Tomi 1-4, Liguori, Napoli,
2009;

o in rete, facendo la login come ospite al sito

<http://didattica.dmsa.unipd.it/>

e poi selezionando Corsi di Analisi Matematica 1 - Settore Informazione. In questa pagina
web si trovano anche temi d'esame del passato, così come al sito del docente

<http://www.math.unipd.it/~bardi/didattica/>

al quale si rimanda per le regole d'esame e altre informazioni sul corso.

Il ricevimento studenti prosegue fino a settembre su appuntamento nello studio del
docente (Dipartimento di Matematica P. e A., 5^o piano di Torre Archimede, via Trieste 63).
Gli interessati possono mandare un'e-mail a bardi@math.unipd.it o telefonare al numero
049-8271468.