Esercizi di autoverifica: funzioni di più variabili

A. *Continuità e calcolo differenziale.*

1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2}\, y \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$i)$ Si stabilisca se f è continua in (0,0).
$ii)$ Se ne calcolino le derivate parziali in (0,0).

2. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$
$i)$ è continua in $(0,0)$,
$ii)$ è dotata di derivate parziali in $(0,0)$,
$iii)$ è differenziabile in $(0,0)$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x\log(x^2+y^2)$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Si trovino
$i)$ L'insieme in cui f è continua;
$ii)$ l'insieme in cui f ha derivata parziale rispetto a x;
$iii)$ l'insieme in cui f ha derivata parziale rispetto a y;
$iv)$ l'insieme in cui f è differenziabile.

4. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f_\alpha(0,0) = 0.$$

$i)$ Per quali valori di α la funzione f_α è continua in $(0,0)$?
$ii)$ Per quali valori di α la funzione f_α è differenziabile in $(0,0)$?
$iii)$ Calcolare le derivate parziali di f_α nei punti degli assi cartesiani.

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{xy} & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases}$$

si trovino gli insiemi dei punti in cui è continua, derivabile direzionalmente, differenziabile.

6. Sia $f \in C^o(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(-2,2) = -1$, $f(2,2) = 1$. Si dimostri che:
$i)$ f si annulla in almeno un punto.
$ii)$ f si annulla in un numero infinito di punti.

7. Data la funzione

$$f(x,y) = xy^2 + \log(x^2+1) + 2\cos(xy),$$

trovare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto (0,1,2).

8. Data la curva di equazione polare $\rho = e^{-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di arrivo $(\theta = 2\pi)$.

9. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f_\alpha(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3).$$

$i)$ Determinare i valori di α tali che il gradiente di f_α in $(0,1)$ sia parallelo alla tangente alla parabola $y = (x+1)^2$ nello stesso punto.
$ii)$ Determinare α in modo che il piano tangente in $(0,1,-1)$ al grafico di f_α sia ortogonale alla retta $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{3z}{2}$.

B. *Massimi e minimi.*

10. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^3 + (x+y)^2$ si determinino
  $i)$ i punti di massimo e di minimo relativo per f;
  $ii)$ l'immagine $f(\mathbb{R}^2)$ di f.

11. Determinare i punti stazionari di $f(x,y,z) = x \sin z + y^2$ e dire se sono di massimo, minimo o sella.

12. Si determinino gli eventuali punti di estremo della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$$

nel suo dominio.

13. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x,y) = x^3 + 4\alpha xy - 2\alpha y^2$$

non ha punti di minimo relativo. Per tali valori di α determinare gli eventuali punti di massimo relativo e di sella di f_α.

14. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 5^{(x^2+3y^2)}.$$

Calcolare massimo e minimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{(y+2)^2}{4} \leq 1\}.$$

15. Sia $f(x,y) = e^{xy}$ e sia $E = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$. Trovare massimo e minimo assoluti di f su E e i punti in cui sono assunti.

16. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x,y) = (1 - x^2 - 4y^2)^2$$

nel quadrato $Q = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$.

17. Data la funzione $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, ricercare gli eventuali estremi relativi nei punti interni del triangolo T definito dalle disequazioni

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\ ;\ 0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{4}.$$

Calcolare inoltre il massimo e il minimo assoluti di f in T.

18. Calcolare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \log(y - x + 1)$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq \arctan x,\ x \geq -1,\ y \leq \frac{\pi}{4}\}$.

19. Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = \cos x \cos y$ nel triangolo T di vertici $A = (0, -\pi/2)$; $B = (\pi/2, 0)$; $C = (0, \pi/2)$.

20. *i*) Sia $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 3,\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Data la funzione

$$f : L \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{2}\right),$$

trovarne i massimi e minimi assoluti e i punti di massimo e minimo assoluti.

ii)* Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 3,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Data la funzione

$$g : S \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right),$$

trovarne i massimi e minimi assoluti e i punti di massimo e minimo assoluti.

21. Si definisca

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{4 - x^2 - y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 4 \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

e $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{2}\}$. Si calcolino massimo e minimo di f in D_a per $a \in (0, \sqrt{2})$. Si determinino poi estremo superiore ed inferiore di f in $D_{\sqrt{2}}$.