Integrali su domini illimitati

Martino Bardi
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova
via Trieste 63, I-35121 Padova
bardi@math.unipd.it

In questa nota estendiamo la nozione di funzione Riemann-integrabile in un insieme limitato del piano a insiemi non limitati, ad esempio tutto $\mathbb{R}^2$. L'idea è di approssimare per difetto con integrali fatti su insiemi limitati.

Definizione. 1 *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, una successione di insiemi $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbf{N}$ si dice invadente Ω se*

1. *$\Omega_j \subseteq \Omega$ è compatto e misurabile $\forall\, j$;*
2. *$\Omega_j \subseteq \Omega_{j+1}$ $\forall\, j$, cioè la successione è crescente;*
3. *per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto esiste $j \in \mathbf{N}$ tale che $K \subseteq \Omega_j$.*

Esempio 2 È facile verificare che la successione $\Omega_j = \overline{B_j((x_o, y_o))}$ è invadente $\mathbb{R}^2$, qualunque sia la scelta del centro (x_o, y_o). Un'altra successione invadente $\mathbb{R}^2$ è $\Omega_j = [x_o - j, x_o + j] \times [y_o - j, y_o + j]$ (si invita il lettore a verificarlo per esercizio).

Definizione. 3 *Una funzione $f \in C(\Omega)$ si dice assolutamente integrabile, o sommabile, in Ω se esiste una successione Ω_j invadente Ω tale che*

$$\lim_{j \to +\infty} \iint_{\Omega_j} |f(x, y)|\, dxdy \quad \textit{è finito.} \tag{1}$$

Si osservi che, per la proprietà 1 delle successioni invadenti e per la continuità di f, $\iint_{\Omega_j} |f(x, y)|\, dxdy$ esiste per ogni j. Inoltre per la proprietà 2 la successione $j \mapsto \iint_{\Omega_j} |f(x, y)|\, dxdy$ è crescente (in senso lato). Quindi il teorema sui limiti delle successioni monotone ci dice che il limite (1) esiste e

$$\lim_{j \to +\infty} \iint_{\Omega_j} |f(x, y)|\, dxdy = \sup_{j \in \mathbf{N}} \iint_{\Omega_j} |f(x, y)|\, dxdy.$$

Teorema 4 *Se f è assolutamente integrabile in Ω allora per ogni successione Ω_j invadente Ω*

$$\lim_{j\to+\infty}\iint_{\Omega_j} f(x,y)\,dxdy \quad \textit{esiste finito}$$

e non dipende dalla successione invadente Ω_j.

Definizione. 5 *Se f è assolutamente integrabile in Ω il suo integrale su Ω si dice convergente ed è*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy := \lim_{j\to+\infty}\iint_{\Omega_j} f(x,y)\,dxdy,$$

dove Ω_j è una qualunque successione invadente Ω.

Per il Teorema 4 precedente l'integrale di f su Ω non dipende dalla particolare successione invadente scelta.

Osservazione 6 La nozione analoga per funzioni di una variabile non e' quella di funzione integrabile in senso improprio ma quella di funzione assolutamente integrabile (in senso generalizzato). La nozione analoga per le serie numeriche è quella di assoluta convergenza, non di convergenza semplice.

Esempio 7 Integriamo su $\mathbb{R}^2$ la funzione (positiva) $f(x) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Prendiamo come successione invadente i cerchi chiusi B_j di centro l'origine e raggio j. Usando le coordinate polari si calcola facilmente

$$\iint_{B_j} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy = 2\pi(1-e^{-j^2/2}).$$

Facendo tendere j a infinito si ottiene

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy = 2\pi.$$

Per il Teorema 4 l'integrale non cambia se calcolato con la successione $\Omega_j = [-j,j]^2$. Allora

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy &= \lim_{j\to+\infty}\int_{-j}^{j}\int_{-j}^{j} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dxdy \\ &= \lim_{j\to+\infty}\left(\int_{-j}^{j} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\left(\int_{-j}^{j} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

Combinando i due risultati otteniamo l'importante formula per l'integrale della Gaussiana standard

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Esercizio 8 Trovare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale

$$\iint_{\{(x,y)\,:\, x^2+y^2\geq 1\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\, dxdy$$

e per tali α calcolarlo.
[Risposta: $\alpha > 2$ e $2\pi/(\alpha-2)$. Si noti l'analogia con

$$\int_{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)} \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$, come è noto dal corso di Analisi 1: in entrambi i casi la soglia critica di α è uguale alla dimensione dello spazio. Questo rimane vero anche per dimensioni maggiori.]