Programma di Analisi Matematica 2 – a.a. 2016-17

Docenti: M. Bardi e M. Cirant

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione – matr. 5-9

1. Funzioni di più variabili.

Topologia in $\mathbb{R}^n$. Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare (D). Distanza euclidea. Intorni sferici. Punti di accumulazione e isolati. Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà. Il simbolo ∞ e i suoi intorni.
Limiti. Limiti di funzioni scalari e vettoriali di n variabili, loro proprietà. Continuità e sue proprietà elementari. Limiti di successioni e teorema ponte; teorema dei due carabinieri. Esempi di non esistenza di limiti. Uso di restrizioni e delle coordinate polari per il calcolo di limiti (D).
Funzioni continue. Insiemi compatti e Teorema di Weierstrass (D). Teorema di permanenza del segno (D). Curve e insiemi connessi. Teorema degli zeri (D) e Teorema dei valori intermedi.
Calcolo differenziale di funzioni scalari in più variabili. Derivate direzionali e parziali, gradiente. Funzioni differenziabili e loro proprietà (D). Piano tangente a un grafico. Direzione di massima pendenza (D). Teorema del differenziale totale. Derivate successive, matrice Hessiana; funzioni due volte differenziabili e di classe C^2. Teorema di Schwarz; legame tra derivate seconde direzionali e matrice Hessiana (D). Formula di Taylor di ordine 2 con i resti di Peano (D) e di Lagrange.
Forme quadratiche. Richiami su autovalori e diagonalizzazione di matrici simmetriche. Forme definite e semidefinite positive e negative, forme indefinite: caratterizzazione mediante gli autovalori (D). Criteri di definitezza per le forme in due variabili.
Insiemi convessi e funzioni convesse. Caratterizzazione delle funzioni convesse differenziabili una volta (D) e due volte (D).
Massimi e minimi. Estremi liberi: Teorema di Fermat (D), determinazione della natura dei punti critici mediante la convessità e la matrice Hessiana (D). Estremi vincolati a insiemi la cui frontiera è una curva parametrica.
Funzioni a valori vettoriali. Differenziabilità e matrice Jacobiana. Derivazione di funzioni vettoriali composte.
Integrali dipendenti da parametri. Teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno di integrale.

2. Integrali curvilinei e forme differenziali

Curve. Curve semplici, chiuse, di Jordan, in coordinate polari, regolari, regolari a tratti. Vettore, versore e retta tangente.
Curve di livello. Gli insiemi di livello di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono curve vicino ai punti regolari. Ortogonalità del gradiente di una funzione rispetto alle sue curve di livello (D).
Integrali di funzioni vettoriali di una variabile. Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza per la norma dell'integrale.
Integrali curvilinei. Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve C^1 (D) e formula per la lunghezza. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro (D). Integrali di prima specie, proprietà. Baricentro di una curva. Ascissa curvilinea e sue proprietà (D).
Forme differenziali. Interpretazione come lavoro di un campo vettoriale di forze. Integrali curvilinei di seconda specie, proprietà e comportamento rispetto a curve equivalenti (D). Forme differenziali esatte e campi conservativi, funzione primitiva e potenziale. Caratterizzazione delle forme esatte con gli integrali di seconda specie (D). Forme differenziali chiuse e loro relazione con le forme esatte (D). Rotore e campi irrotazionali. Curve omotope e insiemi semplicemente connessi. Invarianza dell'integrale di una forma chiusa su curve omotope; equivalenza tra forme chiuse e forme esatte in insiemi semplicemente connessi (D).

3. Integrazione di funzioni di più variabili

Integrali doppi su un rettangolo. Suddivisioni, somme di Riemann, definizione di integrale e sue proprietà (linearità, monotonia, teorema della media...). Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione.
Integrali doppi: caso generale. Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione, insiemi di misura nulla e loro caratterizzazione. Misura del grafico di una funzione integrabile su un intervallo. Integrabilità delle funzioni continue. Additività dell'integrale rispetto al dominio. Domini semplici (normali) e formule di riduzione su di essi (D). Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate polari. Baricentro di un insieme misurabile.
Integrali tripli. Definizione di funzione integrabile, insiemi misurabili e loro caratterizzazione, misura del grafico di una funzione integrabile su un insieme misurabile. Integrabilità delle funzioni continue. Baricentro di un insieme misurabile. Formule di riduzione per fili e per strati. Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche. Volume di un solido di rotazione (D).
Integrali su domini illimitati. Successioni invadenti e funzioni assolutamente integrabili. Integrale di funzioni assolutamente integrabili e indipendenza dalla successione invadente. Integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile (D).

4. Superfici e integrali di superficie

Superfici parametriche regolari. Significato della definizione, curve coordinate e vettori tangenti; piano tangente e vettore normale alla superficie. Superfici cartesiane, sfere, coni.
Integrali superficiali. Definizione di area di una superficie e di integrale superficiale, sue motivazioni. Teorema di Guldino (D) sull'area di una superficie di rotazione. Baricentro di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; superfici chiuse e flusso uscente.
Teorema della divergenza. Teoremi della divergenza di Gauss in $\mathbb{R}^3$ (D per domini semplici rispetto a tutti gli assi). Campi solenoidali e $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ (D); potenziale vettore. Domini piani con frontiere regolari a pezzi e orientamento positivo della frontiera; formule di Gauss-Green nel piano (D per domini semplici rispetto agli assi), applicazioni al calcolo di aree e di integrali curvilinei. Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ (D).
Teorema del rotore. Formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$ (D). Superfici con bordo, orientamento del bordo, circuitazione di un campo. Teorema del rotore di Stokes per superfici con bordo e per superfici chiuse (D); condizioni necessarie per l'esistenza di un potenziale vettore.

5. Equazioni differenziali ordinarie

Equazioni lineari del prim'ordine. Principio di sovrapposizione (D); integrale generale dell'equazione omogenea (D). Soluzione particolare di equazioni non omogenee: metodo di variazione della costante (D) e metodi ad hoc per termini noti speciali.
Equazioni del prim'ordine a variabili separabili. Soluzione in forma implicita ed esplicita (D); esempi di esplosione in tempo finito e di non unicità della soluzione del problema di Cauchy.
Problema di Cauchy. Funzioni localmente lipschitziane e teorema di esistenza locale e unicità della soluzione per equazioni del prim'ordine in forma normale; intervallo massimale di esistenza. Teorema di esistenza globale.
Sistemi del primo ordine in forma normale. Risolubilità del problema di Cauchy. Riduzione di un'equazione del second'ordine in forma normale ad un sistema.
Sistemi lineari. Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy (D). Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni dei sistemi omogenei (D); principio di sovrapposizione per i sistemi non omogenei.
Sistemi lineari a coefficienti costanti. Soluzioni esplicite di sistemi omogenei mediante gli autovalori (D); integrale generale dell'equazione scalare di ordine 2 (D). Soluzione di sistemi 2×2 omogenei

mediante riduzione a un'equazione scalare di ordine 2. Soluzione particolare di equazioni di ordine 2 e sistemi non omogenei con metodi ad hoc per termini noti speciali.

6. Funzioni olomorfe di variabile complessa

Funzioni di variabile complessa. Topologia, limiti e continuità nel campo complesso C. Derivata in senso complesso, funzioni olomorfe e intere; regole di derivazione. Caratterizzazione della derivabilità in senso complesso mediante le condizioni di Cauchy-Riemann (D).
Esempi di funzioni olomorfe. Esponenziale complesso; seno e coseno in C. Logaritmo principale e potenze a esponente complesso.
Integrali curvilinei di funzioni complesse. Curve in campo complesso, integrali di funzioni di variabile complessa e forme differenziali associate. Teorema integrale di Cauchy (D); integrali in domini con buchi, indice di avvolgimento di una curva. Formula integrale di Cauchy (D).
Derivate di ordine superiore. Derivabilità infinite volte di una funzione olomorfa e formula per le derivate (D).
Primitive. Teorema fondamentale del calcolo per funzioni complesse, esistenza di primitive delle funzioni olomorfe.
Serie di potenze. Convergenza e convergenza assoluta di serie numeriche complesse, serie geometrica in C. Raggio e disco di convergenza: proprietà e metodi di calcolo (D). Integrabilità e derivabilità della somma, legame tra derivate e coefficienti. Sviluppo in serie di Taylor delle funzioni olomorfe (D), esempi. Teorema di Liouville (D) e Teorema fondamentale dell'algebra.
Singolarità isolate. Sviluppi di Laurent e classificazione delle singolarità, funzioni meromorfe. Caratterizzazione delle singolarità mediante limiti (D parziale). Decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici.
Teorema dei residui. Residuo di una funzione in un punto, metodi di calcolo in un polo (D per ordine 1 e 2). Teorema dei residui per cammini e per curve chiuse generali; applicazioni al calcolo di integrali curvilinei e di integrali di funzioni razionali di $\sin t$ e $\cos t$.
Indicatore logaritmico. Molteplicità di uno zero di una funzione olomorfa; fattorizzazione attorno a uno zero e a un polo (D). Teorema dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento (D).

Legenda: **D = con dimostrazione**.

AVVERTENZE

Il 99% degli argomenti in programma si può trovare sui testi consigliati

M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi Matematica, Seconda edizione, McGraw-Hill, 2011;

M. Bardi: dispensa "Complementi di Analisi Matematica 2";

A. Marson: dispensa "Complementi di analisi complessa";

G. De Marco, C. Mariconda: dispensa "Esercizi di analisi complessa";

dispense reperibili al sito web del docente
http://www.math.unipd.it/ bardi/didattica/Analisi Mat. 2 2016-17/
utilizzando username e password dati a lezione.

Da tale sito sono anche scaricabili gli appunti delle lezioni. Si ricorda che tali appunti non sono rivisti e corretti nè completati dal docente dopo la lezione, pertanto possono servire come traccia degli argomenti svolti ma non sostituiscono i testi consigliati.

Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione o assegnati per casa.

Per l'orario di ricevimento dopo la fine del corso gli studenti possono contattare M. Bardi al numero di telefono 049-8271468 o all'indirizzo di e-mail bardi@math.unipd.it