Programma di Fondamenti di Analisi Matematica 2 – a.a. 2019-20
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale, Prof. Martino Bardi

Testo di riferimento:
M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2, Zanichelli, 2009.

Legenda: D = con dimostrazione.

1. Calcolo infinitesimale per le curve (Cap. 2)

Richiami su $\mathbb{R}^n$. Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare (D). Prodotto esterno.
Funzioni vettoriali di una variabile. Definizione di limite e sue proprietà; funzioni vettoriali continue.
urve parametriche. Curve semplici, chiuse, in coordinate polari, regolari, regolari a tratti. Derivata delle funzioni vettoriali e sue proprietà; vettore e retta tangente a una curva.
Integrali di funzioni vettoriali di una variabile. Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza per la norma dell'integrale.
Lunghezza di un arco di curva. Curve rettificabili e lunghezza. Rettificabilità delle curve C^1 (D) e formula per la lunghezza. Lunghezza dei grafici cartesiani e delle curve in coordinate polari. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro. Ascissa curvilinea e sue proprietà (D).
Integrali curvilinei di prima specie. Integrali di linea di funzioni scalari, loro proprietà. Indipendenza dell'integrale dal cambiamento di parametro della curva (D). Baricentri e momenti di inerzia delle curve.

2. Funzioni di più variabili (Cap. 3)

Funzioni scalari di n variabili : Dominio, grafico (per $n = 2$), insiemi di livello.
Limiti e continuità. Limiti di successioni in $\mathbb{R}^n$; definizione di intorno sferico di un punto e punto di accumulazione di un insieme. Definizione di limite di una funzione mediante successioni. Definizione diretta di limite e sue proprietà. Funzioni continue: proprietà elementari ed esempi. Teorema di permanenza del segno.
Calcolo dei limiti. Restrizioni di una funzione a curve, esempi di non esistenza di limiti. Uso delle coordinate polari e di maggiorazioni con funzioni radiali per l'esistenza del limite. Teorema del confronto e dei due carabinieri.
Topologia in $\mathbb{R}^n$. Punti interni, esterni, di frontiera; chiusura di un insieme. Insiemi aperti e chiusi; loro proprietà, riconoscimento di aperti e chiusi definiti mediante disuguaglianze. Insiemi limitati e illimitati; definizione di $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{x})$.
Proprietà topologiche delle funzioni continue. Teorema di Weierstrass sull'esistenza degli estremi. Insiemi connessi (per archi) e teorema degli zeri (D).
Calcolo differenziale di funzioni scalari in più variabili. Derivate parziali e gradiente, regole di derivazione. Funzioni differenziabili e loro proprietà (D). Piano tangente a un grafico. Condizioni sufficienti di differenziabilità (teorema del differenziale totale). Derivate direzionali e formula del gradiente (D). Direzioni di massima e minima crescita (D). Ortogonalità del gradiente di una funzione rispetto alle sue curve di livello (D).
Derivate successive : derivate seconde e matrice Hessiana. Teorema di Schwarz. Formula di Taylor di ordine 2 con il resto di Peano (D).
Forme quadratiche. Forme definite e semidefinite positive e negative, forme indefinite. Criteri di definitezza per le forme in due variabili (D) e tre variabili. Richiami su autovalori e diagonalizzazione di matrici simmetriche. Caratterizzazione della definitezza mediante gli autovalori (D).

Ottimizzazione: estremi liberi. Massimi e minimi locali: Teorema di Fermat (D). Studio della natura dei punti critici mediante la matrice Hessiana (D).
Funzioni convesse di n variabili. Definizioni di insiemi convessi, funzioni convesse, strettamente convesse, concave. Caratterizzazione della convessità mediante il piano tangente (D solo della condizione necessaria). Convessità e matrice Hessiana. Minimi globali di funzioni convesse.
Funzioni di più variabili a valori vettoriali (**Cap. 4, sez. 1 e 2**). Limiti e continuità. Differenziabilità e matrice Jacobiana. Derivazione di funzioni vettoriali composte. Trasformazioni di coordinate in $I\!R^2$ e $I\!R^3$.
Funzioni definite implicitamente. Teorema di Dini in $I\!R^2$ (D di esistenza e unicità), formula per la derivata della funzione implicita (D). Retta tangente a una curva definita implicitamente; derivata seconda della funzione implicita. Funzione implicita di 2 variabili per equazioni in $I\!R^3$: teorema di Dini.
Ottimizzazione: estremi vincolati (**Cap. 4, sez. 6**). Funzioni ristrette a curve parametriche esplicitabili: metodo diretto. Funzioni ristrette a curve in forma implicita: metodo dei moltiplicatori di Lagrange (D). Estremi globali di funzioni ristrette alla chiusura di un aperto di $I\!R^2$ (limitato o illimitato): ricerca nell'interno e sulla frontiera. Estremi vincolati a superfici in forma implicita: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

3. Calcolo integrale per funzioni di più variabili (Cap. 5)

Integrali doppi su un rettangolo. Somme di Cauchy-Riemann e definizione di integrale. Interpretazione geometrica per integranda non negativa. Integrabilità delle funzioni continue. Continuità degli integrali dipendenti da parametri e formule di riduzione nei rettangoli.
Integrali doppi: caso generale. Definizione di funzione integrabile. Domini $x-$ e $y-$semplici, domini regolari e integrabilità delle funzioni continue. Insiemi misurabili e loro area. Criteri per la misurabilità con misura nulla. Integrabilità delle funzioni limitate con insieme di discontinuità di misura nulla.
Proprietà degli integrali: linearità, monotonia, additività rispetto al dominio; teorema della media integrale (D). Teorema di riduzione per domini semplici (D). Baricentro e momento d'inerzia di un insieme piano. Teorema del cambiamento di variabili, motivazioni alla formula con trasformazioni affini. Coordinate polari.
Cenni agli integrali doppi generalizzati. Integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile (D).
Integrali tripli. Definizione; interpretazione geometrica e fisica, baricentro e momento d'inerzia di un corpo tridimensionale. Integrabilità delle funzioni continue in insiemi semplici o stratificati, formule di riduzione per fili e per strati. Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche. Volume di una regione tridimensionale; volume dei solidi di rotazione (D) (teorema di Pappo-Guldino). .

4. Campi vettoriali (Cap. 6, sez. 1 e 2)

Integrali di linea di campi. Campi vettoriali e lavoro elementare di una forza. Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva regolare o regolare a tratti, circuitazione. Proprietà degli integrali curvilinei di 2a specie (linearità, additività rispetto al dominio), comportamento rispetto a cambi di parametrizzazione (D). Il linguaggio delle forme differenziali.
Campi conservativi. Forme differenziali esatte e campi conservativi, funzione primitiva e potenziale. Calcolo del lavoro mediante il potenziale (D). Caratterizzazione dei campi conservativi con gli integrali di seconda specie (D).
Campi irrotazionali. Rotore, campi irrotazionali, forme differenziali chiuse; loro relazione con i campi conservativi (D). Insiemi semplicemente connessi, equivalenza tra forme chiuse e forme esatte in insiemi semplicemente connessi.

Formule di Gauss-Green nel piano. Orientamento positivo della frontiera dei domini semplici in $I\!R^2$, formule di Gauss-Green (D) e di Stokes (D) in tali domini, estensione a domini s-decomponibili. Applicazioni al calcolo di aree, di integrali doppi, e di integrali su curve chiuse di campi irrotazionali.

5. Superfici e integrali di superficie (Dispensa "Complementi..." del docente; cap. 4 sez. 1.1, cap. 6 sez. 3, 4.2, 5 e 6)
Superfici parametriche regolari semplici. Significato della definizione, curve coordinate e vettori tangenti; piano tangente e vettore normale alla superficie. Superfici cartesiane, sfere, coni.
Integrali superficiali. Definizione di area di una superficie e di integrale superficiale, sue motivazioni. Baricentro di una superficie. Teorema di Pappo-Guldino (D) sull'area di una superficie di rotazione. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; superfici chiuse e flusso uscente.
Teorema della divergenza. Divergenza di un campo vettoriale; teorema della divergenza di Gauss in $I\!R^3$ (D per domini semplici rispetto a tutti gli assi) e in $I\!R^2$.
Teorema del rotore. Superfici con bordo, orientamento del bordo. Teorema del rotore di Stokes per superfici con bordo (D solo nel caso particolare di superfici piane). Campi solenoidali: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ (D). Teorema del rotore di Stokes per superfici chiuse (D).
Potenziale vettore: condizioni necessarie per l'esistenza, esistenza locale per campi solenoidali.

6. Equazioni differenziali ordinarie (Cap. 1, sez. 2 e 3; cap. 8, sez. 1.1 e 2).
Equazioni del prim'ordine a variabili separabili. Soluzione in forma implicita ed esplicita; esempi di esplosione in tempo finito e di non unicità della soluzione del problema di Cauchy.
Problema di Cauchy. Sistemi di equazioni del 1o ordine in forma normale; riduzione di un'equazione del second'ordine in forma normale ad un sistema del 1o ordine. Esistenza locale di una soluzione del problema di Cauchy (Teorema di Peano); esistenza e unicità locale della soluzione per campi vettoriali C^1 o localmente lipschitziani (Teorema di Cauchy); intervallo massimale di esistenza. Teorema di esistenza globale.
Sistemi lineari. Esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy (D) per sistemi e per equazioni scalari del 2o ordine. Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni dei sistemi omogenei (D) e sua dimensione; principio di sovrapposizione per i sistemi non omogenei (D).
Equazioni e sistemi lineari a coefficienti costanti. Integrale generale dell'equazione scalare omogenea di ordine 2; soluzioni particolari di equazioni di ordine 2 non omogenee col metodo di somiglianza per termini noti speciali. Soluzione di sistemi 2×2 mediante riduzione a un'equazione scalare di ordine 2.

AVVERTENZE

Tutti gli argomenti si intendono corredati degli esempi ed esercizi svolti a lezione o assegnati per casa.

Il sito web del corso è

http://www.math.unipd.it/ bardi/didattica/Analisi Mat. 2 2019-20/

dove si trovano varie informazioni utili, in particolare sugli esami, ricevimento studenti, e libri di esercizi attinenti al corso.

La cartella "Materiale", alla quale si accede con username e password dati a lezione, contiene
- la dispensa "Esercizi di F.A.M. 2" del docente,
- la dispensa "Complementi al corso di F.A.M. 2" del docente,
- gli appunti delle lezioni; si ricorda che tali appunti non sono rivisti e corretti nè completati dal docente dopo la lezione, pertanto possono servire come traccia degli argomenti svolti ma non sostituiscono il testo consigliato.