Equazioni Differenziali 2,
Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2011/2012

Docenti: Martino Bardi e Annalisa Cesaroni

Programma dettagliato

La maggior parte delle dimostrazioni svolte nella prima parte del corso, parti 1–7, sono sintetizzate nei fogli di esempi ed esercizi disponibili alla pagina
`http://www.math.unipd.it/ acesar/equadiff2.html`

1. Introduzione (riferimenti [E], capitolo 1, sez 1.1, 1.2, 1.3)

Generalità sulle equazioni alle derivate parziali, ordine di un'equazione, classificazione degli operatori differenziali in lineari, semilineari, quasilineari e totalmente nonlineari. Esempi di equazioni lineari del primo e secondo ordine (equazione del trasporto, equazione di Laplace, equazione del calore, equazione delle onde) e di equazioni non lineari (equazione iconale, legge di conservazione, equazioni di reazione diffusione). Nozione di buona positura per un problema alle derivate parziali. Equazioni evolutive e stazionarie, problema di Cauchy e problema di Dirichlet.

2. Il metodo delle caratteristiche (riferimenti [E], capitolo 3, sez. 3.2, [L] capitolo 1, sez. 1.2)

Derivazione delle equazioni caratteristiche associate a una generica equazione $F(x, u, Du) = 0$ in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Derivazione delle equazioni caratteristiche nel caso evolutivo, per una equazione differenziale del tipo $u_t + H(x, u, D_x u) = 0$ in $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Condizioni di compatibilità sui dati iniziali delle equazioni caratteristiche rispetto al dato iniziale del problema evolutivo.

Teorema di esistenza locale (nel tempo) delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

nel caso in cui H, g siano di classe $\mathcal{C}^2$ e $Dg, D^2 g$ siano limitati **(con dim.)**. Esempi di esistenza globale di soluzioni con il metodo delle caratteristiche: equazione del trasporto omogenea e non omogenea, caso di H, g convesse, e caso di g affine. Esempi di non esistenza globale delle soluzioni regolari (intersezioni di caratteristiche). Estensioni al caso in cui H dipenda anche da x, u.

Il metodo delle caratteristiche per il problema di Dirichlet (cenni). Terne ammissibili di dati iniziali per le equazioni caratteristiche, terne caratteristiche e non caratteristiche (esempi per il caso lineare, caso di campo tangenziale e di campo entrante). Costruzione locale di soluzioni del problema di Dirichlet a partire da punti non caratteristici. Esempi di non esistenza globale (intersezione di caratteristiche).

3. Introduzione al calcolo delle variazioni (riferimenti [E], capitolo 3, sez 3.3.)

Introduzione al calcolo delle variazioni, esempi classici: problema della brachistocrona, superfici di rotazione di area minima, principio di minima azione di Hamilton. Condizioni necessarie per la minimalità: equazioni di Eulero-Lagrange **(con dim.** nel caso L di classe $\mathcal{C}^2$ e curve ammissibili di classe $\mathcal{C}^1$). Punti critici e punti di minimo del funzionale. Caso in cui la lagrangiana L non dipenda da t (caso autonomo): una condizione necessaria di minimalità del primo ordine (condizione dell'integrale primo). Applicazione alla ricerca di soluzioni del problema della brachistocrona e delle superfici di rotazione di area minima (cenni). Collegamento con le equazioni caratteristiche associate a un'appropriata equazione di tipo Hamilton-Jacobi.

4. Introduzione all'analisi convessa (riferimenti [E], capitolo 3, sez 3.3, e appendice B)

Definizione e principali proprietà delle funzioni convesse. Definizione di sottogradiente per funzioni convesse. Trasformata di Legendre (dualità convessa). Teorema di dualità convessa (**con dim** nel caso $L(q)$ sia convessa e superlineare). Generalizzazione al caso di $L(x, q)$, e al caso L convessa e coerciva (trasformata generalizzata).

5. La formula di Hopf-Lax (riferimenti [E], capitolo 3, sez 3.3)

La formula di Hopf-Lax come soluzione di un problema di calcolo delle variazioni (**con dim.**). Principio di programmazione dinamica, Lipschitzianità della funzione di Hopf-Lax (**dim. fac.**). La formula di Hopf-Lax è soluzione generalizzata di un problema di Cauchy con operatore differenziale di Hamilton-Jacobi (**con dim.**). Esempi di soluzioni, collegamento con il metodo delle caratteristiche. Cenni sul legame tra soluzioni generalizzate Lipschitziane di equazioni di Hamilton-Jacobi e soluzioni deboli di leggi di conservazione scalari. Cenni alla formula di Lax-Oleinik.

6. Soluzioni di viscosità di equazioni di Hamilton-Jacobi (riferimenti [BCD], capitolo 2, sezioni 1, 2, 3, 4.1, 5.1, 5.3, [E], capitolo 10)

Definizione di soluzione di viscosità per equazioni di Hamilton-Jacobi. Motivazione del nome: cenni al metodo della viscosità evanescente. Equivalenza della definizione con le funzioni test e con i sotto e sopragradienti (**con dim.**). Proprietà dei sotto e sopra differenziali. Relazioni con soluzioni generalizzate. Stabilità delle soluzioni di viscosità rispetto alla convergenza uniforme (**con dim.**).

La funzione distanza da un chiuso in $\mathbb{R}^n$, principali proprietà. La funzione distanza è soluzione di viscosità dell'equazione iconale nell'aperto complementare al chiuso e sottosoluzione in tutto lo spazio (**con dim.**).

Alcune proprietà delle soluzioni di viscosità. Hamiltoniane coercive nella variabile gradiente: le sottosoluzioni sono Lipschitziane (caso di $\mathbb{R}^n$ e di un dominio limitato, **con dim.**). Hamiltoniane convesse nella variabile gradiente: le sottosoluzioni Lipschitziane generalizzate sono sottosoluzioni di viscosità (**con dim.**) La funzione di Hopf-Lax è soluzione di viscosità di un appropriato problema di Cauchy.

Principi di confronto per sotto e soprasoluzioni di viscosità continue in domini limitati: dimostrazione classica (metodo di raddoppiamento delle variabili), sotto ipotesi standard del tipo uniforme continuità di H (**dim.**). Sostituzione dell'ipotesi di uniforme continuità con l'ipotesi di Lipschitzianità della sotto o della soprasoluzione, esempio H coerciva, (**dim.**). Principio di confronto per sotto e soprasoluzioni di $H(x, Du) = 0$ in un aperto limitato, con H convessa nella variabile gradiente, sotto l'ipotesi che esista una sottosoluzione stretta regolare (**dim.**). Estensione al caso di domini illimitati e al caso evolutivo del principio di confronto per sotto e soprasoluzioni limitate e continue. Ipotesi minime per applicare l'argomento del principio di confronto.

7. Introduzione al controllo ottimo e soluzioni di viscosità (riferimenti [BCD], capitolo 3, sez. 1 e 3 e appendice 5, [E], capitolo 10)

Richiami su teoremi di esistenza e unicità per soluzioni alla Caratheodory di equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali controllate, e problemi di controllo ottimo. Esempi: problemi di calcolo delle variazioni, problemi di natura finanziaria, problemi di natura ingegneristica. Definizione di funzione valore di un problema a orizzonte finito, principali proprietà, limitatezza e continuità uniforme. Principio di programmazione dinamica (**dim.**). La funzione valore è l'unica soluzione di viscosità di un problema di Cauchy con dato finale (**dim.**). Caso del problema di Cauchy con dato iniziale, rappresentazione della soluzione. Caso di funzione valore di un problema a orizzonte infinito (cenni).

8. Introduzione al controllo Lineare-Quadratico (riferimenti [FR] cap. IV, sez. 4 e 5, [B])

Controlli feedback. Teorema di verifica e sintesi del feedback ottimale per problemi a orizzonte finito in forma di Mayer (**dim.**). Regolatore lineare-quadratico a orizzonte finito e equazione differenziale di Riccati, risolubilità in grande di quest'ultima (**dim.**). Teorema di verifica a orizzonte infinito, controllo L-Q e equazione matriciale di Riccati; esempi espliciti in dimensione 1.

9. Introduzione alla teoria dei giochi (riferimenti [Bar] cap. 1 e 3, [Bre], [B] e per i cenni storici [P])

Giochi a somma nulla: valore e punti sella (**dim.**), esempi di giochi matriciali. Teorema di min-max di Von Neumann (**dim.**). Strategie miste ed esistenza del valore nei giochi matriciali (**dim.**), metodi elementari di calcolo ed esempi. Esistenza del valore in strategie miste per giochi a somma nulla generali.

Giochi a due persone a somma non nulla: equilibri di Nash ed esempi (dilemma del prigioniero,...). Esistenza di equlibri sotto ipotesi di convessità (**dim.**) usando il teorema di punto fisso di Brouwer; equilibri in strategie miste.

10. Introduzione ai giochi differenziali (riferimenti [Bre], [ES], [BCD] cap. VIII, [B])

Giochi differenziali a due persone: equilibri di Nash in forma feedback e teoremi di verifica (**dim.**). Giochi differenziali L-Q a somma non nulla ed equazioni di Riccati (**dim.**). Giochi L-Q a somma nulla: equazione di Isaacs e risolubilità in grande dell'equazione di Riccati (**dim.**). Un modello di pubblicità in regime di duopolio con soluzione esplicita.

Giochi differenziali a somma nulla: strategie non-anticipanti e definizione di valore inferiore e superiore, esempi. Principio della programmazione dinamica (**dim. fac.**) e continuità delle funzioni valore (**dim.**). Caratterizzazione delle funzioni valore come soluzioni delle equazioni di Isaacs (**dim.**), esistenza del valore. Strategie miste nei giochi differenziali, esempi.

11. Valore critico delle Hamiltoniane e applicazioni (riferimenti [LPV], [B-h])

Hamiltoniane periodiche in x ed equazione critica, motivazioni con cenni al controllo ergodico. Equivalenza tra asintotica in tempi lunghi, limite del piccolo tasso di sconto ed esistenza del valore critico generalizzato (Appendix 6.2 in [AB03], **dim.**). Esistenza del valore critico per Hamiltoniane coercive in p (teorema di Lions-Papanicolaou-Varadhan o KAM debole, **dim.**). Calcolo del valore critico per Hamiltoniane meccaniche, di tipo Bellman e Isaacs, e applicazioni alla teoria del controllo e dei giochi. Esempi di giochi differenziali per i quali non esiste il valore critico e di esistenza di tale valore per Hamiltoniane di Isaacs non coercive [AB05]. Cenni al problema del valore critico con parametro P (Hamiltonina effettiva o funzione di Mather) e alle sue motivazioni in dinamica dei sistemi hamiltoniani e in problemi di omogeneizzazione.

Bibliografia

Gli articoli contrassegnati con asterisco * sono disponibili alla pagina
`http://www.math.unipd.it/ bardi/didattica/Equazioni Differenziali 2 - 2012/`

[AB03] O. Alvarez, M. Bardi, *Singular perturbations of degenerate parabolic PDEs...*, Arch. Rat. Mech. Anal. 2003.*

[AB05] O. Alvarez, M. Bardi, *Ergodic problems in differential games*, Ann. I.S.D.G. 2005.*

[B] M. Bardi, *Appunti delle lezioni.** In corso di stesura, saranno messi sul sito appena possibile.

[B-h] M. Bardi, *Metodi di viscosità per l'omogeneizzazione...*, note di corsi di dottorato, 2011.*

[BCD] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, **Optimal control and Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations**, Birkhäuser, Boston, 1997; 2nd printing, Modern Birkhäuser Classics, 2008.

[Bar] N. Barron, **Game Theory**, Wiley, 2008.

[Bre] A. Bressan, *Noncoopeative differential games - a tutorial*, 2011.*

[E] L. C. Evans, **Partial Differential Equations**, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010.

[E] L. C. Evans, P. Souganidis *Differential Games and representation formulas...*, Indiana Univ. Math. J. 1984.*

[FR] W. Fleming, R. Rishel, **Deterministic and stochastic optimal control**, Springer, New York, 1975.

[L] P.-L. Lions, **Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations**, Pitman, Boston, 1982.

[LPV] P.-L. Lions, G. Papanicolaou, S. Varadhan, *Homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, unpublished 1986.*

[P] W. Poundstone, **Prisoner's dilemma**, Anchor Books, 1993