Appunti sulle equazioni ellittiche

Versione marzo 2010

Martino Bardi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova

Via Trieste, 63, 35121, Padova, Italia.

bardi@math.unipd.it

1 PRINCIPI DI MASSIMO PER OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

1.1 Principio di Massimo Debole

IDEA : Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e $u \in C^2(\Omega)$, se $\overline{x} \in \Omega$ è di massimo relativo per u, è noto che

$$\begin{cases} Du(\overline{x}) = 0, \\ D^2u(\overline{x}) \leq 0, \end{cases}$$

dove $Du := \nabla u$, e $D^2u := (u_{x_ix_j})_{i,j}$ e $A \leq 0$ (risp. ≥ 0) significa che la matrice simmetrica A è semidefinita negativa (risp. semidefinita positiva). Quindi per ogni $b\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ si ha:

$$-\Delta u(\overline{x}) + b(\overline{x}) \cdot D(\overline{x}) \geq 0.$$

Abbiamo provato il seguente risultato:

Lemma 1.1.1 (Principio di Max 1). *Se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa*

$$-\Delta u + b \cdot Du < 0 \quad in\ \Omega,$$

allora u non ha massimi relativi interni in Ω. In particolare se $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω limitato, il massimo di u è raggiunto su $\partial\Omega$. □

Consideriamo il seguente operatore:

$$Lu := -\sum_{i,j} a_{i,j} u_{x_i xj} + b \cdot Du \quad in\ \Omega,$$

dove $a_{i,j}\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $A(x) := (a_{i,j}(x))_{i,j}$ è matrice simmetrica e semidefinita positiva.

ESERCIZIO 1 Se A, B sono matrici semidefinite positive allora $tr(AB) \geq 0$.

Vale quindi il seguente

Lemma 1.1.2 (Principio di max 2). *Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che*

$$Lu < 0 \quad in\ \Omega. \tag{1.1}$$

Allora valgono le conclusioni del lemma 1.1.1. □

Cosa possiamo dire se anzichè (1.1) vale $Lu \leq 0$ oppure

$$Lu + cu \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.2}$$

per una $c: \Omega \to \mathbb{R}$?

La prima conclusione dei lemmi 1.1.1 e 1.1.2 non è vera in generale perchè le costanti soddisfano (1.2) se $c \equiv 0$. Il Principio di Massimo Forte ci dirà che, sotto certe ipotesi, le costanti rappresentano l'unica eccezione. La seconda conclusione dei lemmi 1.1.1 e 1.1.2 implica

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{1.3}$$

Il Principio di Massimo Debole ci dirà che, sotto qualche ipotesi, (1.2) implica (1.3).

NOTAZIONE: Indichiamo con $\mu(x)$ il minimo autovalore di $A(x)$.

È noto che

$$a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Osserviamo che essendo $A(x)$ semidefinita positiva, si ha $\mu(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$.

Definizione 1.1.1. L è *ellittico* in Ω se $\mu(x) > 0$ in Ω, L è *uniformemente ellittico* se $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ in Ω.

Assumeremo le seguenti ipotesi:

(H_1) $c \geq 0$, esiste $\alpha \in C(\Omega)$ tale che per ogni $x \in \Omega$:

$$\mu(x) \geq \alpha(x) \text{ e } (\alpha + c)(x) > 0.$$

(H_2) b limitata, Ω limitato.

Osserviamo che (H_1) risulta verificata ad esempio se $\mu \in C(\Omega), c \geq 0$ e $\mu + c > 0$, oppure nel caso uniformemente ellittico $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, se $c \geq 0$

Lemma 1.1.3. *Assumiamo $(H_1) - (H_2)$, sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} Lu + cu \leq 0 & \text{in } \Omega; \\ u \leq 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u \leq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $\overline{x} \in \Omega$ tale che

$$u(\overline{x}) = M = \max_{\overline{\Omega}} u(x) > 0.$$

Distinguiamo due casi.

1) $c(\overline{x}) > 0$: in questo caso si vede facilmente che

$$Lu(\overline{x}) + cu(\overline{x}) > 0,$$

il che è assurdo.
2) Supponiamo che $c = 0$ in $\mathcal{M} := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Allora, tenendo conto di (H_1) e usando la continuità di α e la compattezza di $\overline{\Omega}$, si vede che esistono $\alpha_0 > 0$ e $\delta > 0$ tali che

$$\alpha(x) \geq \alpha_0, \quad \text{in } B(\mathcal{M}, \delta).$$

Si osservi che in $B(\mathcal{M}, \delta)$ l'operatore L risulta uniformemente ellittico e quindi si può ripetere il procedimento usato per tali operatori.

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1},$$

con $\gamma > \dfrac{\sup b_1}{\alpha_0}$.

Sia x_ε tale che $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon$. Usando la compattezza di $\overline{\Omega}$ e la convergenza uniforme di u_ε a u si verifica facilmente che esiste una sottosuccessione $\varepsilon_n \searrow 0$ tale x_{ε_n} converge ad un punto $\overline{x} \in \mathcal{M}$. Poichè $c(\overline{x}) = 0$, esiste $\overline{\delta} \leq \delta$ tale che per ogni $x \in B(\overline{x}, \overline{\delta})$:

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \text{ e } u(x) \geq 0.$$

Fissiamo $\varepsilon = \varepsilon_n$ tale che $x_\varepsilon = x_{\varepsilon_n} \in B(\overline{x}, \overline{\delta})$. Si ha:

$$\begin{aligned}
(u_\varepsilon)_{x_i} &= u_{x_i} + \delta_{i,1}\varepsilon\gamma e^{\gamma x_1};\\
(u_\varepsilon)_{x_i x_j} &= u_{x_i x_j} + \delta_{i,1}\delta_{j,1}\varepsilon\gamma^2 e^{\gamma x_1};\\
Lu_\varepsilon &= Lu + \varepsilon\gamma e^{\gamma x_1}(-a_{11}\gamma + b_1)\\
&\leq -cu + \varepsilon\gamma e^{\gamma x_1}(-\alpha_0\gamma + b_1).
\end{aligned}$$

Per la scelta fatta di γ, si vede che $Lu_\varepsilon < 0$ in $B(\overline{x}, \overline{\delta})$ e ciò è in contraddizione con il lemma 1.1.2 essendo x_ε di massimo per u_ε. $\square$

Osservazione 1.1.1. L'ipotesi (H_1) può essere indebolita nel seguente modo:
$(H_1)'$ $c \geq 0$; per ogni $\overline{x} \in \Omega$ tale che $c(\overline{x}) = 0$, esistono $\delta > 0$, $\mu_0 > 0$ tali che $\forall x \in B(\overline{x}, \delta)$: $a_{11}(x) \geq \mu_0$.

Teorema 1.1.1 (Principio di Massimo Debole). *Assumiamo $(H_1) - (H_2)$. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora:*
(i) se $Lu + cu \leq 0$ in Ω si ha

$$\begin{cases} \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \\ \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \qquad \text{se } c \equiv 0; \end{cases}$$

(ii) *se* $Lu + cu \geq 0$ *in* Ω, *si ha*

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{\Omega}} u \geq -\max\limits_{\partial\Omega} u^- \\ \min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u & \text{se } c \equiv 0; \end{cases}$$

(iii) *se* $Lu + cu = 0$ *in* Ω, *si ha*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga (i) e che c non sia identicamente nulla. Sia $v := u - \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. Risulta $v \leq 0$ su $\partial\Omega$ e $Lv + cv \leq 0$. Dal lemma 1.1.3 segue che $v \leq 0$ in Ω. In modo analogo si dimostrano gli altri casi. □

Corollario 1.1.1 (Principio di Confronto). *Assumiamo* $(H_1) - (H_2)$, *siano* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tali che*

$$\begin{cases} Lu + cu \leq Lv + cv & \text{in } \Omega; \\ u \leq v & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u \leq v$ *in* Ω.

Dimostrazione. Basta porre $\omega := u - v$ e applicare il teorema 1.1.1. □

Consideriamo il Problema di Dirichlet

$$(DP) \qquad \begin{cases} Lu + cu = f_0 & \text{in } \Omega; \\ u = g_0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Corollario 1.1.2 (Unicità per (DP)). *Assumiamo* $(H_1) - (H_2)$, *se esiste* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *soluzione di* (DP), *allora essa è unica.*

Dimostrazione. Applicare il Corollario 1.1.1. □

Corollario 1.1.3 (Dipendenza continua dai dati al bordo). *Consideriamo per* $n \geq 1$ *i seguenti problemi di Dirichlet*

$$(DP_n) \qquad \begin{cases} Lu + cu = f & \text{in } \Omega; \\ u = g_n & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia u_n *la soluzione di* (DP_n), *supponiamo che* g_n *converga uniformemente a* g_0. *Allora* u_n *converge uniformemente alla soluzione* u_0 *di* (DP).

Dimostrazione. Sia $\omega_n := u_0 - u_n$; ω_n soddisfa

$$\begin{cases} L\omega_n + c\omega_n = 0 & \text{in } \Omega; \\ \omega_n = g_0 - g_n & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando la parte (iii) del teorema 1.1.1, si trova

$$\max_{\overline{\Omega}} |\omega_n| \leq \max_{\partial\Omega} |g_0 - g_n|,$$

da cui la conclusione. □

ESERCIZIO 2 (Dipendenza continua dal termine noto) Si consideri

$$(DP_n) \qquad \begin{cases} Lu + cu = f_n & \text{in } \Omega; \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia u_n la soluzione di (DP_n), e si supponga che f_n converga uniformemente a f_0. Trovare una condizione per cui u_n converga uniformemente a u_0.

1.2 Principio di Massimo Forte

In questa sezione assumiamo la seguente ipotesi:

(H_3) b limitata, $0 \le c(x) \le C$, $a_{i,j}$ limitate, $\mu(x) \ge \mu_0 > 0$.

Vale il seguente

Lemma 1.2.1 (Hopf-Oleinik '52). *Assumiamo (H_3), sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che*

$$Lu + cu \le 0 \quad \textit{in } \Omega,$$

sia $x_0 \in \partial\Omega$ tale che

i) u continua in x_0, $u(x_0) \ge 0$,

ii) $u(x) < u(x_0)$, $\forall x \in \Omega$

iii) c'è sfera interna a Ω tangente a $\partial\Omega$ in x_0, ossia esistono $y \in \Omega$, $R > 0$: $B(y,R) \subseteq \Omega$, $x_0 \in \partial B(y,R)$.

Allora se esiste $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0)$, dove $\mathbf{n} := \dfrac{x_0 - y}{R}$, si ha $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) > 0$.

Dimostrazione. Sia $v(x) := e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2} > 0$, dove α è una costante da scegliere opportunamente. Si ha:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= -2\alpha(x_i - y_i)e^{-\alpha|x-y|^2}, \\ v_{x_i x_j} &= \left[-2\alpha\delta_{ij} + 4\alpha^2(x_i - y_i)(x_j - y_j)\right] e^{-\alpha|x-y|^2}; \\ Lv + cv &= e^{-\alpha|x-y|^2}\left[-4\alpha^2 a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) + 2\alpha a_{ij} - 2\alpha b_i(x_i - y_i)\right] + cv \\ &\le e^{-\alpha|x-y|^2}\left[-4\alpha^2\mu(x)|x-y|^2 + 2\alpha(a_{i,i} + |b||x-y|) + C\right]. \end{aligned}$$

Si noti che per $0 < \rho \le |x-y|^2 \le R$, esiste α abbastanza grande:

$$Lv + cv \le 0, \quad \text{in } B(y,R) \setminus B(y,\rho).$$

Poichè $u(x) - u(x_0) < 0$ per ogni $x \in \partial B(y,\rho)$, esiste $\varepsilon > 0$:

$$\omega := u - u(x_0) + \varepsilon v \le 0, \quad \text{su } \partial B(y,\rho).$$

Ma $v \equiv 0$ su $\partial B(y,R)$ e quindi $\omega := u - u(x_0) + \varepsilon v \le 0$ su $\partial B(y,R)$.

Infine si verifica facilmente che

$$L\omega + c\omega \le 0, \quad \text{in } A := B(y,R) \setminus B(y,\rho).$$

Applicando il teorema 1.1.1 con $\Omega = A$, si trova $\omega \le 0$, ossia

$$u(x_0) - u(x) \ge \varepsilon v(x).$$

Posto $\mathbf{n}(x_0) := \dfrac{x_0 - y}{R}$, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{u(x_0) - u(x_0 + tn)}{-t} \\
&\ge \varepsilon \lim_{t\to 0^-} \frac{v(x_0 + tn) - v(x_0)}{-t} = -\varepsilon \left. \frac{d}{dt} e^{-\alpha |x_0 - y + t\frac{x_0 - y}{R}|^2} \right|_{t=0} \\
&= 2\varepsilon\alpha \frac{|x_0 - y|^2}{R} e^{-\alpha|x_0 - y|} = 2\varepsilon\alpha R e^{-\alpha R} > 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.2.1 (Principio di Massimo Forte, Hopf 1927). *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ (non necessariamente limitato) e sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che*

$$Lu + cu \le 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Se u ha massimo assoluto nonnegativo in Ω, allora $u \equiv$cost.

Dimostrazione. Sia $M := \max_\Omega u \ge 0$ e supponiamo u non costante. Allora

$$\Omega^- := \{x \in \Omega : u(x) < M\} \ne \emptyset.$$

Sia $y \in \Omega^-$ tale che

$$R = dist(y, \partial\Omega^-) < dist(y, \partial\Omega).$$

Si ha chiaramente

$$B(y,R) \cap \partial\Omega^- = \{x_0\}.$$

A questo punto possiamo applicare il Lemma di Hopf in Ω^- (si vede infatti che risultano verificate le ipotesi di tale lemma). Quindi dovrebbe essere $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) > 0$, mentre si ha $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) = 0$ essendo x_0 punto di massimo interno per u. $\square$

ESERCIZIO 3 i) Se $\partial\Omega \in C^2$, allora ha la proprietà della sfera interna ed esterna.
ii) Dare un esempio di $\partial\Omega \in C^1$ per cui in almeno un punto non esiste nè sfera interna nè esterna.

APPLICAZIONE: Il Problema di Neumann

$$(NP) \qquad \begin{cases} Lu + cu = f & \text{in } \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto di classe C^1 ($\Rightarrow$ esiste la normale esterna $\mathbf{n}(x)$ in ogni $x \in \partial\Omega$).

Ha unicità? Basta verificare se il problema omogeneo

$$(HomNP) \qquad \begin{cases} Lu + cu = 0 & \text{in } \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla. Questo non è certamente vero se $c \equiv 0$. Vale però l'unicità a meno di costanti:

Teorema 1.2.2. *Supponiamo che $\partial\Omega$ abbia la proprietà della sfera interna in ogni punto. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che esiste $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ in ogni $x \in \partial\Omega$ e soddisfacente $(HomNP)$. Allora $u \equiv$ cost. Quindi la soluzione di (NP) è unica a meno di una costante. Se inoltre c non è identicamente nulla, allora (NP) ha soluzione unica.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u non sia costante, allora o u o $-u$ ha massimo $M \geq 0$, supponiamo sia u. Per il Principio di Massimo Forte $u < M$ in Ω e $u(x_0) = M$ per qualche $x_0 \in \partial\Omega$. Dal lemma di Hopf segue che $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) \neq 0$ contro la condizione di Neumann.

Se c non è identicamente nulla si vede facilmente che $(HomNP)$ ha solo la soluzione nulla. □

2 RISOLUBILITÀ DEL PROBLEMA DI DIRICHLET

2.1. Soluzione dell'equazione di Poisson in una palla

Per risolvere il Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson in una palla, cominciamo con lo studiare tale problema nel caso che i dati siano polinomi.

Teorema 2.1.1. *Se f e g sono polinomi in N variabili, allora esiste un polinomio u che risolve*

$$(DP) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_1 := B(0,1), \\ u = g & \text{su } \partial B_1. \end{cases}$$

In particolare u è l'unica soluzione in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ di (DP).

Dimostrazione. L'unicità è nota. Sia

$$\mathcal{P}_n := \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ polinomio di grado} \leq n\}.$$

Definiamo l'operatore $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ cosí $Tu := \Delta[(1 - |x|^2)u]$. Osserviamo che T è iniettivo: se infatti $Tu = 0$, allora $v(x) := (1 - |x|^2)u(x)$ soddisfa $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^N$ e $v \equiv 0$ su ∂B_1, quindi per il Principio del Massimo $v \equiv 0$ in B_1 e perciò $u \equiv 0$ in B_1. Poichè $\mathcal{P}_n$ ha dimensione finita, T deve essere suriettivo, quindi $\forall p \in \mathcal{P}_n \exists! u \in \mathcal{P}_n : Tu = p$. Allora $v(x) = (1 - |x|^2)u(x)$ risolve

$$\begin{cases} \Delta v = p & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ v = 0 & \text{su } \partial B_1, \end{cases}$$

e il teorema è dimostrato per $g \equiv 0$. Per g polinomio qualunque risolviamo

$$\begin{cases} \Delta u = f - \Delta g & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u = 0 & \text{su } \partial B_1, \end{cases}$$

e poi consideriamo $v = u + g$: allora

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ v = g & \text{su } \partial B_1 \end{cases}$$

□

Osservazione 2.1.1. Il metodo si applica a qualunque ellissoide.

Per risolvere (DP) con $g \in C(\mathbb{R}^N)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ o più semplicemente $f \equiv 0$, approssimiamo g uniformemente con polinomi (Teorema di Stone - Weierstrass) e poi dobbiamo passare al limite delle corrispondenti soluzioni u_n. La convergenza uniforme segue dal Principio di Massimo, ma per dimostrare che il limite soddisfa l'equazione, dobbiamo provare la convergenza anche di Du_n e Δu_n. Lo strumento sarà la seguente stima del gradiente nell'interno, che otteniamo con il metodo di Bernstein.

Lemma 2.1.1. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *aperto limitato,* $u \in C^3(\mathbb{R}^N)$, *tale che* $\Delta u = 0$ *in* Ω, *e* $K \subseteq \Omega$ *compatto, allora esiste* $C = C(K)$ *tale che*

$$\max_K |Du| \le C \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Il metodo di Bernstein consiste nell'applicare il Principio di Massimo a Du o ad una opportuna funzione di Du, in questo caso a

$$\omega := \zeta^2 |Du|^2 + \lambda u^2,$$

dove $\lambda > 0$ è una costante da scegliere opportunamente e ζ è una funzione cut-off, ossia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, *supp*$\zeta \in \Omega$, $\zeta \equiv 1$ in K.

Il nostro scopo è di far vedere che

$$-\Delta\omega \le 0 \quad \text{in } \Omega,$$

perchè allora dal PdM segue che

$$\max_{\overline{\Omega}} \omega \le \max_{\partial\Omega} \omega = \lambda \max_{\partial\Omega} u^2,$$

inoltre essendo $\omega = |Du|^2$ in K, otteniamo (2.1) con $C = \sqrt{\lambda}$.

Con un po' di conti si verifica facilmente la seguente relazione

$$\begin{aligned} \Delta\omega = {} & |Du|^2 \Delta(\zeta^2) + 8\zeta\zeta_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} \\ & + 2\zeta^2 \left[\sum_{i,j} u^2_{x_i x_j} + u_{x_i} \Delta u_{x_j} \right] + 2\lambda |Du|^2 + 2\lambda u \Delta u. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ricordando che essendo u armonica, lo sono anche le sue derivate parziali e che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale

$$2a^2 + 8ab \geq -8b^2,$$

ponendo in (2.2) $a := \zeta u_{x_i x_j}$ e $b := \zeta_{x_i} u_{x_j}$ si ottiene

$$\Delta\omega \geq |Du|^2 \left[\Delta(\zeta^2) + 2\lambda - 8|D\zeta|^2\right]. \tag{2.3}$$

A questo punto basta scegliere λ abbastanza grande in modo che l'ultimo membro di (2.3) sia nonnegativo. $\square$.

NOTAZIONE: Per $\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$

$$|\alpha| := \sum_1^N \alpha_i, \ D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}$$

Corollario 2.1.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato, $K \subseteq \Omega$ compatto, α multindice e $u \in C^{2+|\alpha|}(\Omega)$ tale che $\Delta u = 0$ in Ω. Allora esiste $C := C(|\alpha|, N, dist(K, \partial\Omega))$ tale che*

$$\max_K |D^\alpha u| \leq C \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dimostrazione. Supponiamo $|\alpha| = 2$, (poi si procede per induzione). Sia $K' \subseteq \Omega$ compatto tale $K \subseteq \mathrm{Int}K'$. Essendo u_{x_i} armonica, per il Lemma 2.1.1 si ha

$$\max_K |u_{x_i x_j}| \leq C_K \max_{\partial K'} |u_{x_i}| \leq C_K C_{K'} \max_{\partial\Omega} |u|.$$

A questo punto si può procedere per induzione. $\square$

Teorema 2.1.2. *Sia $g \in C(\mathbb{R}^N)$, allora esiste un'unica $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1, \\ u = g & \text{in } \partial B_1. \end{cases} \tag{DP}$$

Inoltre $u \in C^\infty(B_1)$.

Dimostrazione. Se $g \in C(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione di polinomi g_n che converge uniformemente a g. Sia u_n la soluzione di (DP) con $u_n = g_n$ su ∂B_1. Per il PdM sia ha

$$\max_{\overline{B_1}} |u_n - u_m| = \max_{B_1} |g_n - g_m|.$$

Poichè $g_n \rightrightarrows g$, u_n è di Cauchy in $C(\overline{B_1})$ con la norma $|| \cdot ||_\infty$, quindi $u_n \rightrightarrows u$ e $u = g$ su ∂B_1. Rimane da far vedere che $u \in C^\infty(B_1)$ e $\Delta u = 0$ in B_1. Fissiamo $R < 1$, per il Lemma 2.1.1, esisono C_R, C'_R :

$$\max_{B_R} |Du_n - Du_m| \leq C_R \max_{\partial B_1} |g_n - g_m|;$$

$$\max_{B_R} |(u_n - u_m)_{x_i x_j}| \leq C'_R \max_{\partial B_1} |g_n - g_m|, \ \forall i, j.$$

Dunque in B_R si ha:

$$(u_n)_{x_i} \rightrightarrows h_i \text{ e } (u_n)_{x_i x_j} \rightrightarrows h_{i,j},$$

e per il teorema di passaggio al limite sotto segno di derivata, $h_i = u_{x_i}$, $h_{i,j} = u_{x_i x_j}$. Allora essendo $\Delta u_n = 0$, $\forall n$ si ha $\Delta u = 0$ in B_R e quindi, vista l'arbitrarietà di R, in B_1. Inoltre iterando il procedimento fatto sopra, si trova che $u \in C^\infty(B_1)$. $\square$

ESERCIZIO 4 Estendere il teorema di esistenza per (DP) a $\Delta u = f$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$.
SUGG :Provare che per ogni $0 < r < 1$ esiste $C = C(r, N)$:

$$\max_{B_r} \left(|u| + |Du| + |D^2 u|\right) \leq C \left(\max_{\partial B_1} |u| + \max_{\overline{B_1}} |f| + \max_{\overline{B_1}} |Df| + \max_{\overline{B_1}} |D^2 f| \right).$$

Corollario 2.1.2. *Ogni successione limitata di funzioni armoniche in un aperto Ω ammette una sottosuccessione che converge uniformemente su ogni $K \subseteq \Omega$ compatto ad una funzione f armonica.*

Dimostrazione. Per il Corollario 2.1.1 si trova che u_n, Du_n e $D^2 u_n$ sono equilimitate ed equicontinue. Per Ascoli Arzelà esiste n_k : u_{n_k}, Du_{n_k}, $D^2 u_{n_k}$ convergono a funzioni armoniche. Per dimostrare la convergenza su ogni compatto, si prende una successione di compatti K_n invadente Ω e si usa poi un procedimento diagonale. $\square$

2.2 Funzioni subarmoniche e loro proprietà

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato.

Definizione 2.2.1. Diremo che $u \in C(\Omega)$ è *subarmonica* (risp. *superarmonica*) in Ω se per ogni palla $B \subset\subset \Omega$ e per ogni h tale che

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } B, \\ h \geq u & \text{in } \partial B \text{ (risp. } h \leq u), \end{cases}$$

vale $h \geq u$ in B (risp. $h \leq u$).

ESEMPIO Se $-\Delta u \leq 0$ in Ω e $u \in C^2(\Omega)$, allora u è subarmonica.

Definizione 2.2.2. (Sollevamento armonico). *Data u subarmonica, si dice sollevamento armonico di u in B, la funzione*

$$U(x) := \begin{cases} \overline{u} & \text{in } \overline{B}, \\ u & \text{in } \Omega \setminus B; \end{cases}$$

dove $\overline{u}$ è soluzione di

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} = 0 & \text{in } B, \\ \overline{u} = u & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

N.B.: $U \geq u$ per definizione di funzione subarmonica.

ESERCIZIO 5 Dimostrare che data $u \in C(\Omega)$, sono fatti equivalenti:
1) u è subarmonica.
2) $\forall B \subset\subset \Omega$, $\forall h$ tale che

$$\begin{cases} -\Delta h \geq 0 & \text{in } B, \\ h \geq u & \text{in } \partial B \text{ (risp. } h \leq u), \end{cases}$$

si ha $h \geq u$ in B.
3) $\forall \phi \in C^2(\Omega)$, $\forall x_0$ punto di massimo relativo per $u - \phi$, si ha $-\Delta\phi(x_0) \leq 0$ (in tal caso u si dice *sottosoluzione di viscosità* dell'equazione $-\Delta u = 0$).
SUGG: per 1)$\Rightarrow$ 2) usare il sollevamento armonico.

ESERCIZIO 6 (a) Dimostrare che data $u \in C(\Omega)$ che sia subarmonica e superarmonica, allora $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω.

(b) Dare un esempio di funzione $u \notin C^2(\Omega)$ subarmonica.

Definizione 2.2.3. Una funzione $w : X \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è *semicontinua superiormente* (abbreviato s.c.s.) in x_0 se

$$w(x_0) \geq \limsup_{y \to x_0} w(y);$$

w è *semicontinua inferiormente* (abbreviato s.c.i.) in x_0 se $-w$ è s.c.s., ovvero se

$$w(x_0) \leq \liminf_{y \to x_0} w(y).$$

Teorema (Weierstrass). Se w è s.c.s. in X compatto allora ammette massimo.

Dimostrazione. Sia $x_n \in X$ una successione massimizzante, cioè tale che $w(x_n) \to \sup_X w$. Per la compattezza di X esiste una sottosuccessione $x_{n_k} \to \overline{x} \in X$. Allora

$$w(\overline{x}) \geq \limsup_{y \to \overline{x}} w(y) \geq \lim_k w(x_{n_k}) = \sup_X w.$$

Quindi $\overline{x}$ è un punto di massimo di w. □

ESERCIZIO 7 Dimostrare che sono equivalenti:
1) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; U$ intorno di $x_0 : \forall x \in U \;\; u(x) \leq u(x_0) + \epsilon$.
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; u^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ è aperto.
3) $\forall \{x_n\} \subseteq X, \; x_n \to x_0$ vale $\limsup_n u(x_n) \leq u(x_0)$.

ESERCIZIO 8 Dimostrare che:
(a) $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è chiuso $\Leftrightarrow \chi_A$ è s.c.s.
(b) A è aperto $\Leftrightarrow \chi_A$ è s.c.i.
(c) L'inf di funzioni s.c.s. è s.c.s.; il sup di funzioni s.c.i. è s.c.i.

Proposizione 2.2.1. (Principio di Confronto Forte). *Siano u, v due funzioni rispettivamente subarmonica e superarmonica in Ω tali che*

$$\limsup_{\Omega \epsilon y \to x} (u - v)(y) \leq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Allora o $u < v$ in Ω oppure $u \equiv v$ in Ω. In ogni caso $u \leq v$ in Ω.

Dimostrazione. Si estenda $u - v$ da Ω a $\overline{\Omega}$ ponendo

$$(u-v)(x) := \limsup_{y \to x} (u-v)(y).$$

Allora $u - v$ è s.c.s. in $\overline{\Omega}$. Supponiamo che $\exists x_0 \in \Omega$ tale che

$$(u-v)(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} (u-v) = M \geq 0.$$

Se, per assurdo, $u \neq v$ si può scegliere x_0 e $B := B(x_0, r) \subseteq \Omega$ tali che $u - v \neq M$ in ∂B. Siano $\overline{u}, \overline{v}$ tali che $\Delta \overline{u} = \Delta \overline{v} = 0$ in B, e $\overline{u} = u$ e $\overline{v} = v$ su ∂B. Allora $\overline{u} \geq u$ e $\overline{v} \leq v$ per definizione di subarmonica e superarmonica. Allora

$$M \geq \sup_{\partial B} (u-v) = \sup_{\partial B} (\overline{u} - \overline{v}) \geq (\overline{u} - \overline{v})(x_0) \geq (u-v)(x_0) = M$$

Quindi per il Principio del Massimo Forte $\overline{u} - \overline{v} \equiv M$ in B, perciò $u - v \equiv M$ su ∂B, in contraddizione con la scelta di B. $\square$

Proposizione 2.2.2. *Il sollevamento armonico U è subarmonico.*

Dimostrazione. Che $U \in C(\Omega)$ è ovvio. Sia $B' \subset\subset \Omega$ e

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } B', \\ h \geq U & \text{in } \partial B'. \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare che $U \leq h$ in B'. I casi $B' \subseteq B$ e $B \cap B' = \emptyset$ sono immediati. Sia dunque $B \cap B' \neq \emptyset$ ma B' non incluso in B. Su $\partial B'$ si ha $u \leq U \leq h$. Ma u è subarmonica quindi $u \leq h$ in B', dunque $U = u \leq h$ in $B' \setminus B$. Resta $B' \cap B$: siano $\Gamma := \partial(B' \cap B) \cap \overline{B}$ e $\Gamma' := \partial(B' \cap B) \cap B'$. Allora

$$\begin{cases} \Delta(U - h) = 0 & \text{in } B' \cap B, \\ h \geq U & \text{in } \Gamma, \\ h \geq U & \text{in } \Gamma', \end{cases}$$

quindi per il Principio del Massimo $U \leq h$ in $B' \cap B$. $\square$

Proposizione 2.2.3. *Il massimo di un insieme finito di funzioni subarmoniche è subarmonico.*

Dimostrazione. Siano $u_1, ..., u_n$ subarmoniche. Definiamo

$$u(x) := \max_n \{u_1(x), ..., u_n(x)\}.$$

Se

$$\begin{cases} \Delta h \geq 0 & \text{in } B, \\ h \geq u & \text{in } \partial B, \end{cases}$$

allora $\forall k :\ h \geq u_k$ su ∂B, quindi $\forall k :\ h \geq u_k$ in B e infine $h \geq u$ in B. $\square$

2.3 Il metodo di Perron

Torniamo al problema di Dirichlet

$$(DP) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} \Omega \text{ limitato (non necessariamente regolare)}, \\ g \text{ limitata (non necessariamente continua)}. \end{cases}$$

Definizione 2.2.4. Gli insiemi delle *sottosoluzioni e soprasoluzioni generalizzate di* (DP) *associate al dato* g sono

$$\mathcal{S}_g := \{u \text{ subarmonica } : \limsup_{y\to x} u(y) \le g(x)\ \forall x \in \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{Z}_g := \{u \text{ superarmonica } : \liminf_{y\to x} u(y) \ge g(x)\ \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Osservazione 2.2.1. Per la Proposizione 2.2.1. si ha $\forall v \in \mathcal{S}_g, \forall w \in \mathcal{Z}_g, v \le w$ in quanto $\limsup(v-w) \le \limsup v - \liminf w \le 0$.

Osservazione 2.2.2. Se esiste u soluzione di (DP) allora $u \in \mathcal{S}_g \cap \mathcal{Z}_g$ e

$$u(x) = \max_{\omega\in\mathcal{S}_g} \omega(x) = \min_{v\in\mathcal{Z}_g} v(x).$$

Allora definiamo, per $x \in \Omega$,

$$\underline{H}_g(x) := \sup_{\omega\in\mathcal{S}_g} w(x), \qquad \overline{H}_g(x) := \inf_{v\in\mathcal{Z}_g} v(x),$$

perchè, se la soluzione u di (DP) esiste allora

$$u = \underline{H}_g = \overline{H}_g.$$

Abbiamo infatti il seguente

Teorema 2.2.1 (Perron, 1923). $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$ *sono armoniche in* Ω, *cioè*

$$\Delta\overline{H}_g = \Delta\underline{H}_g = 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Osservazione 2.2.3. Questo non risolve ancora il problema perchè non è detto che $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$ si estendano con continuità a g su $\partial\Omega$: si veda l'esempio seguente.

ESEMPIO Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$ e sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ così definita: $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ per $|x| = 1$. Proviamo che $\overline{H}_g = \underline{H}_g = 0$ (e quindi g è risolutiva secondo la Def. 2.2.5 seguente). Infatti, $0 \in \mathcal{S}_g$ e quindi $0 \le \underline{H}_g$. Per $\epsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$w_\epsilon(x) = -\epsilon \log|x|, \quad x \neq 0.$$

Si ha che w_ϵ è armonica, $w_\epsilon(x) = 0$ per $|x| = 1$ e $w_\epsilon(x) \to +\infty$ per $x \to 0$. Dunque $w_\epsilon \in \mathcal{Z}_g$ e quindi $0 \leq \overline{H}_g \leq w_\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$. Per $\epsilon \to 0$ si deduce che $\overline{H}_g = 0$. La soluzione generalizzata $H_g := \overline{H}_g = \underline{H}_g = 0$ non verifica la condizione al bordo nel punto $x = 0$.

Osservazione 2.2.4. Poichè $\sup g \in \mathcal{Z}_g$ e $\inf g \in \mathcal{S}_g$, per la Proposizione 2.2.1.

$$\underline{H}_g(x) \leq \sup g < +\infty, \qquad \overline{H}_g(x) \geq \inf g > -\infty.$$

Inoltre $\underline{H}_g \leq \overline{H}_g$.

Dimostrazione del Teorema di Perron. Sia $u(x) := \underline{H}_g(x) = \sup_{v \in \mathcal{S}_g} v(x)$. Fissato $y \in \Omega$ esiste $\tilde{v}_n \in \mathcal{S}_g$ tale che $\tilde{v}_n(y) \to u(y)$. Definiamo

$$v_n(x) := \max\{\tilde{v}_n(x), \inf g\},$$

allora per la Proposizione 2.2.3. $v_n \in \mathcal{S}_g$. Quindi

$$\inf g \leq v_n(x) \leq \sup g, \ \forall x \in \Omega,$$

la successione v_n è limitata e $v_n(y) \to u(y)$.

Fissato $R :\ B := B(y, R) \subset\subset \Omega$, sia V_n il sollevamento armonico di v_n in B. Per la Proposizione 2.2.2. $V_n \in \mathcal{S}_g$. Quindi $v_n \leq V_n \leq u$ e perciò $V_n(y) \to u(y)$ e $\{V_n\}$ è limitata.Per il Teorema di compattezza delle funzioni armoniche in B,

$$\exists\ \{V_{n_k}\} :\ V_{n_k} \rightrightarrows v \text{ in } B(y, \rho)\ \forall \rho < R \text{ e } \Delta v = 0 \text{ in } B.$$

Inoltre $v \leq u$ in B e $v(y) = u(y)$.

TESI: $v = u$ in B.

Per assurdo sia $z \in B :\ v(z) < u(z)$. Allora $\exists\ \overline{u} \in \mathcal{S}_g :\ v(z) < \overline{u}(z)$. Definiamo

$$w_k(x) := \max\{V_{n_k}(x),\ \overline{u}(x)\},$$

$w_k \in \mathcal{S}_g$ per la Proposizione 2.2.3. Sia W_k il sollevamento armonico di w_k. $\{W_k\}$ è limitata, per il Teorema di compattezza $W_k \rightrightarrows w$ armonica in B e $v \leq w \leq u$ in B, $v(y) = w(y) = u(y)$.

Dunque $v - w$ è armonica, $v - w \leq 0$ in B e $(v - w)(y) = 0$, cioè ha un massimo interno, quindi per il Principio del Massimo Forte $v \equiv w$ in B.

Ma $\overline{u} \leq w_k \leq W_k$ quindi $\overline{u} \leq w$ e $v(z) < u(z)$ il che è assurdo. $\square$

Definizione 2.2.5. Se $\underline{H}_g = \overline{H}_g =: H_g$ il dato g si dice *risolutivo* per (DP) e H_g è la *soluzione generalizzata, o di Wiener,* del Problema di Dirichlet (DP).

Teorema 2.2.2 (Wiener 1924). *Per ogni aperto limitato Ω, ogni $g \in C(\partial\Omega)$ è risolutiva (e quindi esiste H_g).*

Lemma 2.2.1. *Siano $f, g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ limitate. Allora*
i) $\underline{H}_f + \underline{H}_g \leq \underline{H}_{f+g}$, $\overline{H}_f + \overline{H}_g \geq \overline{H}_{f+g}$;
ii) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_f \leq \underline{H}_g$ e $\overline{H}_f \leq \overline{H}_g$;
iii) $\underline{H}_{g+c} = \underline{H}_g + c$, $\overline{H}_{g+c} = \overline{H}_g + c$.

Dimostrazione. i) $\mathcal{S}_f + \mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{S}_{f+g}$. Siano $u \in \mathcal{S}_f,\ v \in \mathcal{S}_g$ tali che

$$\limsup_{x\to y} u(x) \leq f(y), \qquad \limsup_{x\to y} v(x) \leq g(y), \qquad y \in \partial\Omega.$$

Quindi

$$\limsup_{x\to y}(u+v) \leq (f+g)(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Allora

$$\underline{H}_f + \underline{H}_g = \sup_{u\in\mathcal{S}_f, v\in\mathcal{S}_g}(u+v) \leq \sup_{w\in\mathcal{S}_{f+g}} w = \underline{H}_{f+g}.$$

□

La seguente proposizione afferma che le funzioni risolutive formano uno spazio vettoriale chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

Proposizione 2.2.4. *Siano f, g limitate. Allora*
(i) *se f, g sono risolutive, allora $f + g$ è risolutiva, e $H_{f+g} = H_f + H_g$;*
(ii) *se f è risolutiva, $c \in \mathbb{R}$, allora cf è risolutiva e $H_{cf} = cH_f$;*
(iii) *se $\{f_n\}$ è una successione di dati risolutivi e $f_n \rightrightarrows f$, allora f è risolutiva e $H_{f_n} \rightrightarrows H_f$.*

Dimostrazione. (i) Per ipotesi si ha $\underline{H}_g = \overline{H}_g$ e $\underline{H}_f = \overline{H}_f$, inoltre dal Lemma 2.1.1 segue

$$\overline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_f + \overline{H}_g = \underline{H}_f + \underline{H}_g \leq \underline{H}_{f+g}$$

quindi $\underline{H}_{f+g} = \overline{H}_{f+g}$.

(ii) ESERCIZIO

(iii) Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora $\exists m :\ \forall n \geq m :$

$$f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon.$$

Per il Lemma 2.1.1 si ha

$$H_{f_n} - \varepsilon = \underline{H}_{f_n+\varepsilon} \leq \underline{H}_f \leq \underline{H}_{f_n+\varepsilon} = H_{f_n} + \varepsilon.$$

Da ciò segue la convergenza uniforme di H_{f_n} a $\underline{H}_f$. In modo analogo si dimostra che $H_{f_n} \rightrightarrows \overline{H}_f$. □

Lemma 2.2.2. *Se esiste u subarmonica (risp. superarmonica) tale che $g(x) = \lim_{y\to x} u(y)$ per ogni $x \in \partial\Omega$, allora g è risolutiva e $H_g = \min_{\omega\in\mathcal{Z}_g} \omega$ (risp. $H_g = \max_{\omega\in\mathcal{S}_g} \omega$).*

Dimostrazione. Chiaramente $u \in \mathcal{S}_g$ e quindi $u \leq \underline{H}_g$, quindi

$$\liminf_{y \to x} \underline{H}_g(y) \geq \liminf_{y \to x} u(y) = g(x).$$

Inoltre $\underline{H}_g \in \mathcal{Z}_g$ perchè è armonica e quindi il dato è risolutivo essendo $\underline{H}_g \geq \overline{H}_g = \inf_{\omega \in \mathcal{Z}_g} \omega$. □

Lemma 2.2.3. *Per ogni $g \in C(\partial\Omega)$ esiste una successione di polinomi $\{P_n\}$ tali che $P_n = Q_n - R_n$ con Q_n, R_n subarmoniche in Ω e $P_n \rightrightarrows g$ su $\partial\Omega$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Stone–Weierstrass (una funzione continua su un compatto si approssima uniformemente con polinomi) esiste una successione di polinomi P_n tale che $P_n \rightrightarrows g$. Scriviamo

$$P_n(x) = P_n(x) + \lambda_n |x|^2 - \lambda_n |x|^2$$

dove λ_n è da scegliersi in modo che $Q_n(x) := P_n(x) + \lambda_n|x|^2$ e $R_n(x) := \lambda_n|x|^2$ soddisfino

$$\Delta R_n = \lambda_n 2N \geq 0, \ \Delta Q_n = \Delta P_n + 2\lambda_n N \geq 0$$

in Ω. □

Dimostrazione del Teorema di Wiener. Siano $P_n \rightrightarrows g$, Q_n e R_n come nel Lemma 2.2.3. Allora $Q_n|_{\partial\Omega}$ e $-R_n|_{\partial\Omega}$ sono risolutivi per il Lemma 2.2.2. Quindi P_n è risolutivo per la Proposizione 2.2.4 (i) e infine anche g è risolutivo per la Proposizione 2.2.4 (iii). □

Studiamo ora il comportamento alla frontiera di $\underline{H}_g$ e $\overline{H}_g$.

Definizione 2.2.6. Una *barriera* in $\xi \in \partial\Omega$ è una funzione w superarmonica in Ω tale che:

i) $w > 0$ in Ω;

ii) $\lim_{x \to \xi} w(x) = 0$;

iii) $\liminf_{x \to y} w(x) > 0, \ \forall y \in \partial\Omega, \ y \neq \xi$.

ESEMPIO Se Ω soddisfa la condizione di sfera esterna in ξ, cioè esistono y ed $R > 0$ tali che $\overline{B}(y, R) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$, allora la funzione così definita

$$w(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{R^{N-2}} - \dfrac{1}{|x-y|^{N-2}} & \text{se } N \geq 3, \\ \log \dfrac{|x-y|}{R} & \text{se } N = 2, \end{cases}$$

è una barriera. La dimostrazione è facile ed è lasciata come esercizio.

Osservazione 2.2.5. L'esistenza di una barriera in ξ è una proprietà locale di Ω. Infatti, se esiste w che soddisfa le proprietà di una barriera in $\Omega \cap U$ anzichè in Ω per qualche U intorno di ξ, allora w si estende a una barriera.

Dimostrazione. Sia w barriera locale in ξ. Prendo $B = B(\rho, r) \subset\subset U$.Osserviamo che $\inf_{U \setminus B} w = m > 0$ perchè w estesa a $\overline{U \setminus B}$ mediante $\liminf$ è positiva e s.c.i., quindi ha minimo positivo. Allora

$$w(x) := \begin{cases} \min\{m, w(x)\} & \text{in } \Omega \cap B, \\ m & \text{in } \Omega \setminus B \end{cases}$$

è superarmonica in Ω (verifica per esercizio) e ha ovviamente le altre proprietà. $\square$

Teorema 2.2.3. *Se g è limitata e continua in $\xi \in \partial\Omega$, allora*

$$\lim_{x \to \xi} \underline{H}_g(x) = \lim_{x \to \xi} \overline{H}_g(x) = g(\xi)$$

$\iff$ *esiste una barriera in ξ.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Prendo $g(x) = |x - \xi|^2$. Tesi: $\underline{H}_g$ è una barriera.

Un calcolo diretto mostra che $\Delta g(x) = 2N$, quindi g è subarmonica in Ω e perciò $g \in \mathcal{S}_g$. Allora $H_g = \underline{H}_g \geq g > 0$ in Ω. Inoltre

$$\liminf_{x \to y} H_g(x) \geq |y - \xi|^2 > 0, \text{ per } y \in \partial\Omega, y \neq \xi.$$

Infine

$$\lim_{x \to \xi} H_g(x) = g(\xi) = 0$$

per ipotesi. Poichè H_g è armonica è una barriera.

"$\Leftarrow$" Sia w barriera in ξ. Fisso $\epsilon > 0$ e pongo $M := \sup |g|$. La continuità di g in ξ implica $\exists \delta$:

$$|g(x) - g(\xi)| < \epsilon, \text{ in } B := B(\xi, \delta).$$

Estendo w a $\overline{\Omega}$ mediante $\liminf$, allora w è s.c.i. in $\overline{\Omega}$, $W > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$. Dunque $\min_{\overline{\Omega} \setminus B} w > 0$, quindi $\exists k > 0$ (che può dipendere da ϵ) tale che $kw(x) \geq 2M$ $\forall x \in \overline{\Omega} \setminus B$. Ora

$$u(x) := kw(x) + \epsilon + g(\xi)$$

è superarmonica e

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq \begin{cases} 2M + g(\xi) \geq M \geq g(y) & \forall y \in \partial\Omega \setminus B, \\ \epsilon + g(\xi) \geq g(y) & \forall y \in B \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Quindi $u \in \mathcal{Z}_g$. Analogamente

$$v(x) := g(\xi) - \epsilon - kw(x)$$

è subarmonica e

$$\limsup_{x \to y} v(x) \leq \begin{cases} g(\xi) - 2M \leq -M \leq g(y) & \forall y \in \partial\Omega \setminus B, \\ g(\xi) - \epsilon \leq g(y) & \forall y \in B \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Quindi $v \in \mathcal{S}_g$. Allora $\forall x \in \Omega$

$$kw(x) + \epsilon \geq \begin{cases} |\underline{H}_g(x) - g(\xi)| \\ |\overline{H}_g(x) - g(\xi)|. \end{cases}$$

Poichè $\lim_{x \to \xi} w(x) = 0$ e ϵ è arbitrario otteniamo la conclusione. $\square$

Corollario 2.2.1. *Il problema di Dirichlet* (DP) *ha una e una sola soluzione in* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *per ogni dato al bordo* $g \in C(\partial\Omega) \iff$ *esiste una barriera in ogni punto* $\xi \in \partial\Omega$.

ESERCIZIO 9 Dimostrare che una funzione $u \in C(\overline{B}(x_o, 1))$ tale che $\Delta u \leq 0$ in $B(x_o, 1) \setminus \{x_o\}$ non può avere punti di minimo stretto che cadano in $B(x_o, 1)$.