Esercizi e complementi di Equazioni Differenziali 1
M. Bardi, marzo 2010

Esercizi

Esercizio 1 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso di classe C^1 e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione armonica tale che

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma$$

Verificare che u è costante.

Esercizio 2 Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $g \in C(\Omega)$ una funzione continua e limitata. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione tale che

$$\int_{\Omega} \big(|\nabla u|^2 + (u-g)^2\big) dx \leq \int_{\Omega} \big(|\nabla v|^2 + (v-g)^2\big) dx$$

per ogni $v \in C^1(\Omega)$. Provare che u risolve l'equazione differenziale $\Delta u = u - g$ in Ω.

Esercizio 3 [Laplaciano in coordinate polari] Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ coordinate nel piano e siano $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ le corrispondenti coordinate polari, cioè $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$. Verificare che

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Esercizio 4 Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione subarmonica. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma$$

è monotona crescente.

Esercizio 5 Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione ortogonale rispetto al prodotto scalare standard. Verificare che $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$ per una qualsiasi $u \in C^2$.

Esercizio 6 Sia $\beta \geq 0$ un parametro e sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Si consideri il problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^\beta & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

i) Verificare che se il problema ha una soluzione $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ allora essa è unica e verifica $u(x) = u(y)$ se $|x| = |y|$.

ii) Calcolare la soluzione.

Esercizio 7 Sia u una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione convessa e crescente in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $v = f \circ u$ è subarmonica in $\mathbb{R}^n$.

i) Provare il caso $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ed $f \in C^2(\mathbb{R})$.

ii) Provare il caso generale.

Esercizio 8 Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^2} < +\infty.$$

Provare che u è un polinomio di grado al più 2.

Esercizio 9 Sia $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ e si consideri il nucleo di Poisson di B

$$P(x, y) = \frac{1}{n\omega_n r} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n}, \quad x \in B,\, y \in \partial B.$$

Verificare che per ogni $x \in B$ si ha

$$u(x) := \int_{\partial B} P(x, y)\, d\sigma(y) = 1.$$

Esercizio 10 (Principio di simmetria di Schwarz) Siano $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ e $B^- = \{x \in B : x_n < 0\}$. Sia $C(\bar{B}^+)$ una funzione armonica in B^+ tale che $u(x) = 0$ per $x_n = 0$. Definiamo la funzione $\bar{u} : \bar{B} \to \mathbb{R}$:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \bar{B}^+, \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in \bar{B}^-. \end{cases}$$

Dimostrare che $\bar{u}$ è armonica in B.

Esercizio 11 Determinare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $u(x) = |x|^\beta$ sia subarmonica in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 12 Sia $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^+$. Verificare che la funzione (il "nucleo di Poisson del semispazio")

$$u(x, y) = \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

è armonica in $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Complementi

Esempio di Hadamard

Sia $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $\beta \in \mathbb{N}$ un parametro. Definiamo la funzione u in B tramite coordinate polari

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n^\beta} \frac{\sin(n^\beta \vartheta)}{n^2}, \quad 0 \le r \le 1,\ \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Verificare che:

i) $u \in C(\bar{B})$ e $\Delta u = 0$ in B;

ii) $\displaystyle\int_B |\nabla u|^2 dxdy < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta < 3.$

iii) Se $\beta = 3$ e $g(z) = u(1, \vartheta)$, per il problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = g \quad \text{su } \partial B,$$

non vale il Principio di Dirichlet, cioè la soluzione u non è il minimo del funzionale di Dirichlet $F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$ in

$$\mathcal{A}(\Omega; g) = \Big\{ u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = g,\ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < +\infty \Big\}.$$

Suggerimenti. Considerare la funzione a valori complessi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n^\beta}}{n^2}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1,$$

e osservare che $|\nabla u|^2 = |\partial_z f|^2$. Usare l'identità di Parseval

$$\int_B \Big| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \Big|^2 dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_B |c_n z^n|^2 dxdy.$$

Funzioni armoniche nel senso delle distribuzioni

Definition 0.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si dice armonica in senso distribuzionale in Ω se soddisfa in tale senso l'equazione $\Delta u = 0$, cioè*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\phi(x)\,dx = 0 \tag{0.1}$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Theorem 0.1 (Weyl) *Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione armonica in senso distribuzionale in Ω. Allora, a meno di ridefinire la funzione in un insieme di misura nulla, u è armonica in Ω.*

Il 2^o Test fornisce una traccia di dimostrazione per $u \in C(\mathbb{R}^n)$ (una dimostrazione con una diversa funzione test si trova anche in [HL]). Il caso generale si ottiene con modifiche abbastanza standard e usando la seguente proprietà delle mollificate u_ε di u:

per ogni punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni raggio $r > 0$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(\bar{x},r)} |u_\varepsilon(x) - u(x)|d\sigma = 0.$$

Questo fatto si verifica usando il Teorema di Fubini-Tonelli e il Lemma di Fatou.