Il metodo delle caratteristiche per la legge di conservazione scalare

Dati $F \in C^2(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times]0, T[, \\ u = g & \text{per } \ t = 0. \end{cases} \tag{CP}$$

Si noti che l'equazione si può riscrivere

$$u_t + F'(u)u_x = 0$$

che è un'equazione del trasporto nonlineare con velocità di trasporto dipendente dalla soluzione. In analogia al trasporto lineare cerco traiettorie $t \mapsto (s(t), t)$ lungo le quali u sia costante. Suppongo quindi che esista una soluzione $u \in C^1$ e calcolo

$$\frac{d}{dt}u(s(t), t) = u_x(s(t), t)s'(t) + u_t(s(t), t) = 0$$

se $s(\cdot)$ risolve l'equazione differenziale ordinaria

$$s'(t) = F'(u(s(t), t)). \tag{ODE}$$

Quindi

$$u(s(t), t) = cost. = u(s(0), 0) = g(s(0))$$

su una soluzione di (ODE), e pertanto

$$s'(t) = F'(g(s(0)))$$

cioè

$$s(t) = x_o + tF'(g(x_o)), \qquad t \geq 0.$$

Chiamiamo linea caratteristica che parte da x_o tale semiretta. Abbiamo provato la seguente

Proposizione 0.1 *Se $u \in C^1(\mathbb{R}\times]0, T[) \cap C(\mathbb{R} \times [0, T[)$ risolve (CP) allora*

$$u(x, t) = g(x_o), \qquad \textit{se } x = x_o + tF'(g(x_o)).$$

Si noti che possiamo anche scrivere

$$u(x,t) = g(x - tF'(g(x_o))),$$

dalla quale si ritrova la formula nota nel caso del trasporto lineare $F'(u) \equiv b$. Un'ulteriore formulazione è come problema di funzione implicita:

$$u = u(x,t), \qquad u - g(x - tF'(u)) = 0.$$

La formula di rappresentazione trovata fornisce una candidata soluzione di (CP) se per ogni (x,t) esiste un unico x_o tale che

$$x = x_o + tF'(g(x_o)) =: Q(x_o;t)$$

e $(x,t) \mapsto g(x_o)$ è C^1. Con calcoli elementari si vede che la formula della Proposizione 0.1 definisce una soluzione di (CP) nei due seguenti casi.

Esempio 1. $F'' \geq 0$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ con $g' \geq 0$, $T = +\infty$.
Infatti la limitatezza di g e la continuità di F'' e g' danno $Q(\mathbb{R};t) = \mathbb{R}$ per ogni t, mentre

$$\frac{\partial Q}{\partial x_o} = 1 + tF''(g(x_o))g'(x_o) \geq 1$$

assicura l'invertibilità di $Q(\cdot;t)$ con inversa C^1. In questo caso c'è l'esistenza globale di una soluzione classica (unica) di (CP). Infatti, usando le formule di derivazione della funzione inversa o della funzione implicita, si ottiene

$$u_x(x,t) = \frac{g'(x_o)}{1 + tg'(x_o)F''(g(x_o))}, \tag{$*$}$$

$$u_t(x,t) = \frac{-g'(x_o)F'(g(x_o))}{1 + tg'(x_o)F''(g(x_o))}.$$

Esempio 2. $0 \leq F''(p) \leq F''_{max}$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ con $-g'_{min} \leq g'(y) < 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, $T = (F''_{max}g'_{min})^{-1}$.
Ora

$$\frac{\partial Q}{\partial x_o} > 0 \iff t < \frac{-1}{F''(g(x_o))g'(x_o)}$$

e la disuguaglianza a destra è verificata per $t < T$. In questo caso la soluzione classica esiste solo per tempi piccoli e in seguito sviluppa singolarità (shock). Si noti infatti che la derivata u_x data da $(*)$ diverge per $t \to -(F''(g(x_o))g'(x_o))^{-1}$.

Un esempio in cui lo shock si verifica esattamente al tempo $T = (F''_{max}g'_{min})^{-1}$ è l'equazione di Burger, cioè $F(u) = u^2/2$, con dato iniziale $g(x) = 1$ per $x \leq 0$, $g(x) = 1 - x$ per $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$ per $x > 1$, i cui dettagli si trovano a pag. 140 del libro [E] o alle pagine 134-5 di [Sa].