Equazioni Differenziali 1
4^o appello – 17.9.2010

1) Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione armonica e $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$. Provare che

(i) $v(x) := |u(x)|^p$ è subarmonica,

(ii) se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $u \equiv 0$,

(iii) se $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora u è costante.

2) Sia $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua che risolve il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

(a) Trovare $\lambda < 0$ tale che

$$u(x,t) \leq w(x,t) := x(1-x)e^{\lambda t},$$

(b) calcolare $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)$ e dire se è uniforme in $[0,1]$.

3) **(a)** Enunciare la regolarità delle funzioni con la proprietà di media (sferica o solida) e il loro legame con le funzioni armoniche;

(b) dimostrare gli enunciati del punto (a).

4) **(a)** Dare la definizione di soluzione integrale del problema di Cauchy per una legge di conservazione;

(b) dimostrare che le soluzioni classiche sono soluzioni integrali;

(c) enunciare la condizione di Rankine-Hugoniot; facoltativo: dimostrarla.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato di bella copia.