

Equazioni Differenziali 1 1° appello – 15.3.2010

1) Sia $U = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ e denotiamo, per $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\tilde{x} := (x_1, x_2, -x_3).$$

Se Φ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in \mathbb{R}^3 , definiamo

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}), \quad \text{per } x, y \in U, x \neq y.$$

(i) Provare che $G(x, y)$ è la funzione di Green per U e che $x \mapsto G(x, y)$ è armonica.

(ii) Se $\nu(y)$ è la normale esterna a U in $y \in \partial U$, calcolare $K(x, y) := -\nu(y) \cdot D_y G(x, y)$ e verificare che

$$\int_{\partial U} K(x, y) d\sigma(y) = 1.$$

(iii) Data $g \in C(\partial U)$ a supporto compatto, provare che

$$u(x) := \int_{\partial U} K(x, y) g(y) d\sigma(y), \quad x \in U,$$

risolve il problema di Dirichlet in U , cioè

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } U, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} u(x) = g(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \partial U$$

[la dimostrazione del comportamento su ∂U è **facoltativa**].

2) Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1 , $u \in C(\bar{U} \times]0, T[)$ con derivate prime in t e seconde in x continue in $\bar{U} \times]0, T[$, e u risolve il problema di Cauchy-Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \bar{U} \times]0, T[, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \bar{U}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{in } \partial U \times]0, T[. \end{cases} \quad (\text{CN})$$

Provare che

(i) $e(t) := \int_U u^2(x, t) dx$ soddisfa $\dot{e}(t) \leq 0$;

(ii) u è l'unica soluzione di (CN).

3) (a) Enunciare le stime del gradiente per funzioni armoniche (facoltativo: dimostrarle);

(b) enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

4) (a) Enunciare il teorema di Perron sulle soluzioni generalizzate del problema di Dirichlet (facoltativo: dare una traccia della dimostrazione);

(b) dare la definizione di barriera, farne un esempio e spiegare l'utilità di questa nozione.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato di bella copia.