Equazioni Differenziali 1 $\quad$ 2^o appello – 29.3.2010

1) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1, $g \in C(\partial U)$, $f \in C(\bar{U})$, e definiamo

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U}) \,:\, w = g \text{ su } \partial U\}, \qquad F(w) := \int_U \left(\frac{1}{2}|Dw|^2 + wf\right) dx, \quad w \in \mathcal{A}.$$

Provare che

(i) se F raggiunge il minimo in $u \in \mathcal{A}$, allora u risolve il problema di Dirichlet

$$\Delta u = f \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{su } \partial U; \tag{DP}$$

(ii) se $v, w \in \mathcal{A}$ e v soddisfa (DP), allora

$$\int_U \left(|Dv|^2 + vf\right) dx = \int_U (Dv \cdot Dw + wf)\, dx \quad \text{e} \quad F(v) \le F(w);$$

(iii) F ha al più un minimizzatore in $\mathcal{A}$.

2) Data $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata consideriamo, per ogni $s \ge 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]s, +\infty[, \\ v(x, s; s) = f(x, s) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(i) Dare condizioni su f sotto le quali esiste una soluzione $v(x, t; s)$ per ogni s e scriverne una formula di rappresentazione mediante la soluzione fondamentale Φ dell'equazione del calore.

(ii) Costruire col metodo di Duhamel una soluzione $u(x, t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(iii) Dare condizioni su f e g sotto le quali esiste una soluzione di

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[, \\ w(x, 0) = g & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

scriverne una formula di rappresentazione e dire in che classe di funzioni tale soluzione è unica.

3) Dare la definizione di operatore L uniformemente ellittico, enunciare il principio di massimo debole per le soluzioni di $Lu = 0$ e dimostrarlo.

4) **(a)** Ricavare la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione non omogenea del trasporto; **(b)** enunciare un risultato di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1; facoltativo: dimostrare l'esistenza.

5) **Facoltativo.** Data $u \in C(\mathbb{R}^n)$ convessa provare che
(i) u è subarmonica ;
(ii) se u è armonica allora è un polinomio di primo grado;
(iii) viceversa, per $n = 1$ ogni funzione subarmonica è convessa, ma per $n = 2$ esistono funzioni armoniche non convesse.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato di bella copia.