Equazioni Differenziali 1 $\quad$ 3^o appello – 13.7.2010

1) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco aperto di centro l'origine e raggio 2, $U^+ = \{(x,y) \in U \,:\, x > 0\}$, $u \in C(\overline{U}^+)$ una funziona armonica in U^+ con $u(0,y) = 0$ per ogni y. Si estenda u a $\overline{u} : \overline{U} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\overline{u}(x,y) = -u(-x,y) \quad \text{per } x < 0.$$

Provare che

(i) $\overline{u}$ è armonica in U, usando l'ipotesi aggiuntiva $u \in C^2(\overline{U}^+)$,

(ii) $\overline{u}$ è armonica in U anche senza l'ipotesi aggiuntiva,

(iii) ogni funzione armonica $v \in C(\overline{U})$ armonica in U e tale che $v(x,y) = \sin x$ su ∂U ha la proprietà $v(x,y) = -v(-x,y)$.

2) **(i)** Si consideri l'equazione $v_{xy} = 0$ in $\mathbb{R}^2$ e si provi che tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma

$$v(x,y) = F(x) + G(y)$$

per opportune funzioni F, G;

(ii) con un cambio di variabili della forma $\xi = x + \alpha t, \eta = x + \beta t$ si riduca l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

a $v_{\xi\eta} = 0$ e se ne deduca la forma generale della soluzione di (1);

(iii) usando il punto (ii) si dia una nuova dimostrazione della formula di D'Alembert.

3) **(a)** Enunciare e dimostrare le formule di media per le funzioni armoniche;

(b) provare che le proprietà di media implicano l'armonicita per funzioni di classe C^2.

4) **(a)** Enunciare il principio del massimo per equazioni paraboliche e dimostrarlo;

(b) dedurne l'unicità e la dipendenza continua dai dati della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato di bella copia.