Programma di Equazioni Differenziali 1 – a.a. 2009-10
Docente: Martino Bardi
Corsi di Laurea Magistrale e Triennale in Matematica

1. Richiami e complementi di calcolo per funzioni di più variabili.
- Integrali su varietà. Legame tra integrali di volume e su ipersuperficie: coordinate sferiche in $I\!R^n$. (12.1.10) [DM], [E, App. C.3].
- Aperti con frontiere di classe C^k. (19.1.10) [E, App. C.1].
- Teorema della divergenza in $I\!R^n$ (dim. per domini semplici), sue varianti e conseguenze: teorema del gradiente, formule di Green, integrazione per parti in $I\!R^n$. (18-19.1.10) [DM], [E, App. C.2], [F].
- Derivazione di integrali dipendenti da parametri (s.d.). (22.1.10) [DM].
- Convoluzione, mollificatori e loro proprietà. (29.1.10) [E, App. C.4]. Esistenza di funzioni cutoff. (22.2.10)
- Funzioni semicontinue inferiormente e superiormente e loro proprietà (Teorema di Weierstrass). (15.2.10) [B, Ch. 2.2].

2. Generalità sulle equazioni a derivate parziali
- Multi-indici, PDE di ordine k lineari, semilineari, quasilineari, fully nonlinear, in forma di divergenza. Esempi di PDE notevoli. Classsificazione delle PDE lineari del 2^o ordine. (11.1.10) [E, Ch. 1], [PSa, Ch. 7.1], [Sa, Ch. 5.5].
- Leggi di bilancio e derivazione dell'equazione del calore. (19.1.10) [E, Ch. 2.3].
- Problemi ai valori iniziali e al contorno. Principio di sovrapposizione. (22.1.10) [PSa, Ch. 7.1].

3. Equazioni di Laplace e Poisson
- Unicità per i problemi di Dirichlet e di Neumann mediante le formule di Green (metodo dell'energia). (22.1.10) [E, Ch. 2.2].
- Soluzioni radiali e soluzione fondamentale Φ dell'equazione di Laplace. La convoluzione $\Phi * f$ risolve $-\Delta u = f$ in $I\!R^n$ (*). (22-25.1.10) [E, Ch. 2.2].
- Definizione di distribuzione e sue derivate, la δ di Dirac. La soluzione fondamentale risolve $-\Delta\Phi = \delta$. (25-26.1.10) [Sa, Ch. 7.1 e 7.2].
- Interpretazione variazionale delle funzioni armoniche (Principio di Dirichlet). Spazio $H^1(\Omega)$ e soluzioni deboli dell'equazione di Poisson. (26.1.10) [E, Ch. 2.2 e 5.2].

4. Proprietà delle funzioni armoniche
- Formule di media. Principio del massimo forte e debole, controesempi in aperti non limitati. (1.2.10) [E, Ch. 2.2], [HL, Ch. 1.2].
- Le funzioni con la proprietà di media sono C^∞ ed armoniche (Teorema di Koebe). (1.2.10) [E, Ch. 2.2].
- Stime del gradiente. Teorema di Liouville (per funzioni solo limitate da sotto o da sopra si veda il Cor. 1.6 di [HL]). Formula di rappresentazione per la soluzione dell'equazione di Poisson in $I\!R^n$. (2.2.10) [E, Ch. 2.2].
- Teorema di Ascoli-Arzelà (s.d.) e convergenza uniforme delle funzioni armoniche. (2.2.10) [GT 2.6 e 2.7].
- Stime delle derivate (*) e analiticità delle funzioni armoniche. (2-5.2.10) [HL, Ch. 1.2].
- Disuguaglianza e teorema di convergenza di Harnack. (5.2.10) [E, Ch. 2.2], [GT, Ch. 2.6].

5. Funzioni di Green
- Definizione della funzione di Green e rappresentazione della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (*). (8.2.10) [E, Ch. 2.2].

- Costruzione della funzione di Green nelle palle. Formula di Poisson per funzioni armoniche nelle palle con prescritti dati al bordo (*). (8-9.2.10) [E, Ch. 2.2].

6. Principi del massimo

- Principi del massimo per operatori ellittici degeneri senza termini di ordine 0. Principi del confronto e del massimo con termini di ordine 0. (9-12.2.10) [E, Ch. 6.4], [B, Ch. 1.1].
- Dipendenza continua dai dati al bordo e dal termine noto (fac.) di soluzioni del problema di Dirichlet. (12.2.10) [B, Ch. 1.1].

7. Risolubilità del problema di Dirichlet col metodo di Perron

- Funzioni subarmoniche e loro proprietà. Sollevamento armonico. (15.2.10) [GT, Ch. 2.8], [B, Ch. 2.2].
- Le soluzioni generalizzate di Perron sono armoniche (Teorema di Perron) (*). (16.2.10) [GT, Ch. 2.8], [B, Ch. 2.3].
- Dati al bordo risolutivi e loro proprietà; le funzioni continue sono risolutive (Teorema di Wiener) (*). (16.2.10) [B, Ch. 2.3].
- Barriere; caratterizzazione mediante barriere dei punti regolari per Δ di $\partial\Omega$ (punti in cui la soluzione generalizzata assume il dato al bordo, per ogni dato continuo). (19.2.10) [GT, Ch. 2.8], [B, Ch. 2.3].
- Criteri geometrici per l'esistenza di barriere: condizione di sfera esterna, cenni ad altre condizioni e controesempi (s.d.). (19.2.10) [GT, Ch. 2.8], [B, Ch. 2.3].
- Risolubilità del problema di Dirichlet per $-\Delta u = f$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. (19.2.10)
- Potenziale Newtoniano di funzioni Hölderiane e sue proprietà (s.d.). Risolubilità del problema di Dirichlet per $-\Delta u = f$ con $f \in C^\alpha(\Omega)$. (22.2.10) [GT, Ch. 4.2].

8. Equazione del calore

- Soluzioni invarianti per dilatazioni e soluzione fondamentale Φ dell'equazione del calore. La convoluzione $\Phi * g$ risolve il problema di Cauchy con dato iniziale g. Proprietà della soluzione: propagazione istantanea del supporto, regolarizzazione istantanea dei dati iniziali. (22-23.2.10) [E, Ch. 2.3].
- Principi del massimo per operatori parabolici degeneri, unicità della soluzione e dipendenza continua dai dati al bordo per il problema di Cauchy-Dirichlet in aperti limitati. (26.2.10) [E, Ch. 7.1].
- Unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore tra le funzioni a crescita al più esponenziale (*). (26.2.10) [E, Ch. 2.3].

9. Equazioni del trasporto e delle onde

- Soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del trasporto a coefficienti costanti, omogenea e non. (2.3.10) [E, Ch. 2.1].
- L'equazione delle onde come modello delle vibrazioni di un corpo elastico. (2.3.10) [E, Ch. 2.4].
- Soluzione dell'equazione delle onde lineare omogenea in dimensione 1: formula di D'Alembert. Proprietà della soluzione: regolarità, velocità finita di propagazione. Soluzione dell'equazione non omogenea con il Principio di Duhamel. (2-5.3.10) [E, Ch. 2.4].
- Soluzione del problema della corda vibrante con estremi fissi mediante il metodo di riflessione (*). (5.3.10) [PSa, Ch. 7.1].
- Unicità della soluzione nel cono di dipendenza col metodo dell'energia. (8.3.10) [E, Ch. 2.4].

10. Introduzione alle leggi di conservazione nonlineari

- Metodo delle caratteristiche per la legge di conservazione scalare. Formazione degli shock. (8.3.10) [B2].

- Soluzioni integrali delle leggi di conservazione, condizione di Rankine-Hugoniot. Condizione di entropia e sue conseguenze. (9.3.10) [Sa, Ch. 4.4], [E, Ch. 3.4].

Legenda: (n.m.10) = data della lezione, dim. = dimostrazione, s.d. = senza dimostrazione, fac. = facoltativo, (*) = dimostrazione lunga (si vedano le regole d'esame), Ch. = chapter = capitolo.

Bibliografia

[B] M. Bardi: Appunti sulle equazioni ellittiche, 2010.
[B2] M. Bardi: Il metodo delle caratteristiche per la legge di conservazione scalare.
[DM] G. De Marco: Analisi 2, Decibel - Zanichelli.
[E] L.C. Evans: Partial differential equations, A.M.S., Providence, 1998.
[F] W.H. Fleming: Functions of several variables, Springer-Verlag, New York, 1977.
[GT] D. Gilbarg, N. Trudinger: Elliptic partial differential equations of 2nd order, Springer, Berlin, 1983.
[HL] Q. Han, F. Lin: Elliptic partial differential equations. Courant Lect. Notes Math., A.M.S., Providence, 1997
[PSa] C. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2, Masson.
[Sa] S. Salsa: Equazioni a derivate parziali, Springer.

Avvertenze

Il 75% circa degli argomenti in programma si può trovare sul testo [E] e un altro 20% circa su [GT], [B] e [HL]. Gli appunti [B] e [B2] si possono scaricare dal sito del docente
http://www.math.unipd.it/∼bardi/didattica/
I libri sono consultabili in biblioteca, si veda anche il sito https://ssl.gigapedia.com/login al quale si accede con una password Gmail (il servizio di posta di Google, si può aprire gratuitamente un account al sito https://www.google.com/accounts/). Gli argomenti preliminari di calcolo in più variabili si trovano su molti libri di Analisi 2 e di Advanced Calculus, ad es. [DM], [PSa], [F]. Ciò che non si trova in nessuno dei testi elencati può essere considerato facoltativo (almeno per gli studenti che non hanno frequentato il corso).

Nel sito web del docente si trovano anche i test per casa e altri esercizi. I temi delle prove scritte saranno caricati sul sito subito dopo ciascun appello.

Per l'orario di ricevimento dopo la fine del corso gli studenti possono contattare M. Bardi al numero di telefono 049-8271468, o all'indirizzo di e-mail bardi@math.unipd.it, o nel suo studio al 5^o piano di Torre Archimede, corridoio A-B.

Regole d'esame

L'esame consiste di una prova scritta integrata dai test per casa dati durante il corso e da un eventuale orale. Se la prova scritta è sufficiente, al suo punteggio vengono sommati i punti conseguiti nei test per casa, con pesi pari a 4/5 e 1/5. Al momento della registrazione lo studente può visionare le sue prove corrette e gli può essere chiesto qualche chiarimento in proposito. La prova scritta sarà composta per metà da domande di teoria e per metà da esercizi. Le domande di teoria riguarderanno definizioni, enunciati, e dimostrazioni ragionevolmente brevi. Delle dimostrazioni più lunghe, ad esempio quelle indicate con (*) nel programma, può venir chiesta una parte. La durata della prova scritta potrà variare tra 2h 30' e 3h. Gli studenti non potranno uscire dall'aula, almeno per le prime 2 ore, se non consegnando definitivamente il proprio elaborato.

L'orale è facoltativo ed ha lo scopo di migliorare il voto delle prove scritte.

Per sostenere le prove scritte della sessione di marzo gli studenti devono iscriversi alle liste sul S.I.S. http://info.math.unipd.it/cgi-bin/info/Math/printlisteesami.exe . Per l'appello estivo e autunnale ci si iscriverà usando il nuovo sistema di gestione della didattica ESSE3.

Date degli appelli

15.3, ore 9, aula 1C/150 (scritto), 18.3, ore 9, aula 2AB/40 (registrazione e orali);
29.3, ore 9, aula 1AD/100 (scritto), 31.3, ore 13.30, aula 2BC/60 (registrazione e orali);
13.7, ore 9 (da confermare), aula 2BC/60 (scritto), 16.7, ore 12, aula 2BC/30 (reg. e orali);
17.9, ore 9, aula 2BC60 (scritto), 22.9, ore 9, aula 2BC60 (registrazione e orali).