Equazioni Differenziali $\quad$ 1^o test — 29.1.2010

1) a) Sia $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx,$$

dove $|\nabla^2 u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2$ è la norma della matrice Hessiana.

b) Dedurre che una funzione armonica C^3 con supporto compatto è identicamente nulla.

2) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0.$$

a) Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ vale la disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \epsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx.$$

b) Dedurre che se u è anche armonica in Ω allora è costante sulle componenti connesse di Ω.