Equazioni Differenziali $\quad$ 2^o **test — 5.2.2010**

Sia $u \in C(\mathbb{R}^n)$ una soluzione in senso distribuzionale di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\phi(x)\, dx = 0 \tag{1}$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e sia

$$\phi(x) = \begin{cases} |x-\bar{x}|^2 - r^2 & |x-\bar{x}| < r \\ 0 & |x-\bar{x}| \geq r \end{cases}$$

per $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$ fissati.

a) Denotata con v_ϵ la mollificata di una funzione v, provare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\phi_\epsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\Delta u_\epsilon(y)\, dy$$

e dedurne che

$$r\int_{\partial B(\bar{x},r)} u_\epsilon\, d\sigma = n\int_{B(\bar{x},r)} u_\epsilon\, dx.$$

b) Detta $\psi(r) := \int_{B(\bar{x},r)} u\, dx$, provare che $(r^{-n}\psi(r))' = 0$ e dedurre che u è armonica.

c) Quanto dimostrato è un caso particolare del teorema (di Weyl) che afferma che ogni soluzione distribuzionale $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ di $\Delta u = 0$ in un aperto Ω è armonica in Ω.

Facoltativo: dove si incontrano le principali difficoltà nell'estendere la dimostrazione data al caso generale?